

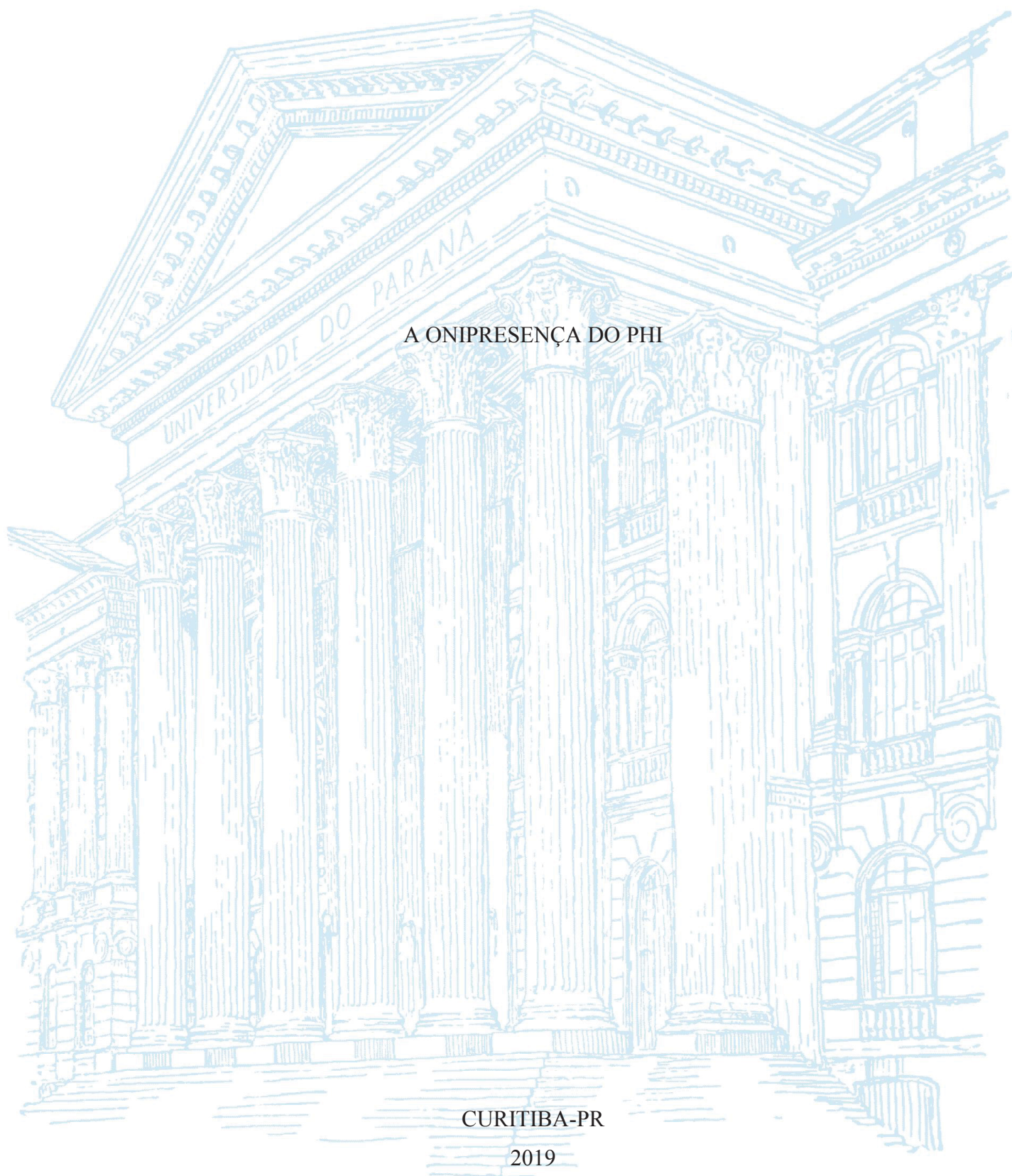
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PLÍNIO HUGO SILVA ALVES

A ONIPRESENÇA DO PHI

CURITIBA-PR

2019



PLÍNIO HUGO SILVA ALVES

A ONIPRESENÇA DO PHI

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Aldemir José da Silva Pinto

CURITIBA-PR

2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

A474o

Alves, Plínio Hugo Silva

A onipresença do PHI [recurso eletrônico] / Plínio Hugo Silva Alves. –
Curitiba, 2019.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,
Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional
(PROFMAT), 2019.

Orientador: Aldemir José da Silva Pinto .

1. Segmento áureo. 2. Fibonacci, Números de. 3. Número áureo. 4. Razão
e proporção. 5. PHI. I. Universidade Federal do Paraná. II. Pinto, Aldemir
José da Silva. III. . IV. Título.

CDD: 510.1

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



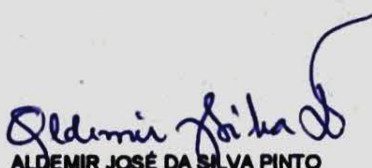
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de PLÍNIO HUGO SILVA ALVES intitulada: A ONIPRESENÇA DO PHI, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

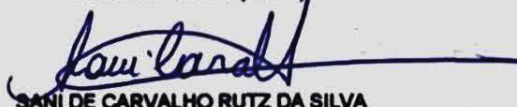
CURITIBA, 26 de Abril de 2019.


ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)


ADRIANA LUIZA DO PRADO

Avaliador Interno (UFPR)


SANI DE CARVALHO RUTZ DA SILVA

Avaliador Externo (UFPR)

À minha mãe, Maria da Glória, à Samara e ao meu filho, Théo.

AGRADECIMENTOS

Não conseguirei citar todos os nomes, pois muitas pessoas tiveram importância na concretização deste trabalho, deste sonho. Mesmo não tendo citado seus nomes, sinto-me grato por todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho existisse. No entanto, na sequência, gostaria de ressaltar algumas contribuições que foram de suma importância.

Inicialmente, gostaria de agradecer a Deus pelo dom da vida e pela condição de enfrentar esta etapa de minha vida.

Agradeço a minha mãe, minha rainha, por ter acreditado em mim e em minha capacidade quando eu duvidei, por ter me apoiado quando eu achei que fracassaria, enfim, por todo o apoio e sacrifício para me ver bem. Agradeço o meu pai, meus irmãos e familiares por todo o auxílio.

À minha noiva, pelo seu esforço para que eu conseguisse cursar o mestrado, por toda a paciência, por compreender a minha ausência, mas, principalmente, por me agraciar com o maior e melhor presente que eu poderia receber, meu filho, Théo, razão do meu viver.

Agradeço aos colegas do curso pelos momentos de descontração e de estudos, que propiciaram experiências engrandecedoras.

Aos professores da Alfabetização, do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e da Graduação pela paciência e dedicação ao ensinar. Aos mestres do PROFMAT, por todos os ensinamentos.

Por fim, mas não menos importante, ao Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto, pela paciência, incentivo, aconselhamento e atenção que me dedicou.

A Geometria tem dois grandes tesouros. Um é o Teorema de Pitágoras.

O outro, a divisão de uma linha nas razões extrema e média.

O primeiro podemos comparar a uma medida de ouro.

O segundo podemos chamar de uma joia preciosa.

Johannes Kepler (1571 a 1630)

RESUMO

Esta dissertação tem por objetivo apresentar e discutir a ubiquidade do Número de Ouro na matemática. Este número muito especial intrigou inúmeros matemáticos ao longo da história, como Euclides, Pitágoras, Fibonacci, entre outros, e chegou a ser considerado um tesouro da Matemática por Kepler e também um número divino por Pacioli. Possui diversas outras denominações, as mais conhecidas são: Número Áureo, Razão ou Proporção Áurea, *Phi*, etc. No decorrer do trabalho é apresentado um estudo com um sucinto contexto histórico, curiosidades, propriedades e aplicações desse número em diversas áreas da Matemática, tais como na Geometria- nas construções do segmento áureo, da espiral áurea e das figuras geométricas áureas, das quais é dado um destaque em especial às diversas relações áureas encontradas no pentágono regular; na Álgebra- na determinação desse número por meio da razão, proporção, equação de 2º grau, limites, etc.; e na Trigonometria - relacionando-o ao ângulo de 18° e seus múltiplos. Também apresenta a relação intrínseca entre a famosa sequência de Fibonacci e 36°. Este trabalho se justifica por ser uma ferramenta rica em conceitos e propriedades capaz de auxiliar professores e estudantes de matemática de todos os níveis da educação, nos estudos sobre o Número de Ouro e suas aplicações na matemática. Como principal base teórica para esta pesquisa, foi recorrido aos estudos/obras de LÍVIO (2006), CONTADOR (2007), HUNTLEY (1985), ZANH (2011) e MOISE & DOWNS (1971).

Palavras-chave: Razão Áurea. Número de Ouro. *Phi*. Sequência de Fibonacci.

ABSTRACT

This dissertation aims to explore a very special number that has intrigued numerous mathematicians throughout the history, for example, Euclid, Pythagoras, Fibonacci, among others. This number was considered a treasure of Mathematics by Kepler and also a divine number by Pacioli. It has several denominations, some the most known are: Gold Number, Ratio or Golden Ratio, Phi, etc. In the course of this paper, a study is presented about the ubiquity of this number in mathematics, with a succinct historical context, curiosities, properties and its applications in several areas of Mathematics, such as in Geometry – in the constructions of the golden segment, the golden spiral, and the golden geometric figures, of which the golden relations found in the regular pentagon are especially prominent; in Algebra – in the determination of this number by means of ratio, proportion, 2nd degree equation, limits, etc.; and in Trigonometry – relating it to the angle of 18° and 36° . It is also presented the intrinsic relationship between the famous Fibonacci sequence and the Gold Number. This paper has its importance justified because it brings concepts and properties for all levels of mathematics studies concerning the Gold Number and its applications. As the main theoretical basis for this research, it was resorted to studies / works by LÍVIO (2006), CONTADOR (2007), HUNTLEY (1985), ZANH (2011) and MOISE & DOWNS (1971).

Keywords: Golden Ratio, Gold Number, *Phi*, Fibonacci Sequence.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1: Grande Pirâmide de Gizé, no Egito | 42 |
| Figura 2: Parte do Papiro de Rhind (Egípcio) ou Ahmes (Museu Britânico-Londres) | 42 |
| Figura 3: Templo de Partenon em Atenas na Grécia..... | 43 |
| Figura 4: Elementos de Euclides segundo uma ilustração medieval..... | 44 |
| Figura 5: Poliedros regulares feitos por Leonardo Da Vinci..... | 46 |
| Figura 6: Obra Sagrada Família de Michelângelo e Mona Lisa de Leonardo Da Vinci | 59 |
| Figura 7: Catedral de Notre Dame de Girassol..... | 60 |
| Figura 8: Triângulo isósceles inscrito no pentágono | 61 |
| Figura 9: Autopropagação do Triângulo de Ouro | 65 |
| Figura 10: Retângulo de Ouro | 67 |
| Figura 11: Autopropagação do Retângulo Áureo..... | 71 |
| Figura 12: Pólo da Construção | 72 |
| Figura 13: Espiral logarítmica e Espiral arquimediana | 72 |
| Figura 14: Espiral Áurea no Triângulo de Ouro..... | 75 |
| Figura 15: Espiral no Retângulo de Ouro..... | 77 |
| Figura 16: Retângulo Áureo autopropagado | 78 |
| Figura 17: Espiral retangular | 79 |
| Figura 18: Círculo..... | 80 |
| Figura 19: Poliedros regulares associados a elementos da natureza | 83 |
| Figura 20: Pentágono regular | 84 |
| Figura 21: Pentagrama..... | 84 |
| Figura 22: Encontro das diagonais do Pentagrama | 85 |
| Figura 23: Triângulo isósceles áureo inscrito no Pentagrama..... | 85 |
| Figura 24: Dodecaedro regular | 85 |
| Figura 25: Triângulo isósceles áureo inscrito no Pentagrama..... | 86 |
| Figura 26: Pentágono regular | 88 |
| Figura 27: Pentágono regular | 89 |
| Figura 28: Pentagrama..... | 90 |
| Figura 29: Pentagrama..... | 91 |
| Figura 30: Pentagrama..... | 92 |
| Figura 31: Pentagrama..... | 93 |
| Figura 32: Pentagrama..... | 94 |

| | |
|--|-----|
| Figura 33: Pentagrama..... | 95 |
| Figura 34: Pentagrama..... | 96 |
| Figura 35: Pentagrama..... | 97 |
| Figura 36: Pentagrama..... | 98 |
| Figura 37: Pentagrama..... | 99 |
| Figura 38: Pentagrama..... | 100 |
| Figura 39: Pentagrama..... | 102 |
| Figura 40: Pentagrama..... | 103 |
| Figura 41: Pentagrama..... | 104 |
| Figura 42: Decágono | 107 |
| Figura 43: Livro Liber Abacci..... | 109 |
| Figura 44: Construção do Retângulo de Fibonacci | 121 |
| Figura 45: Retângulo de Fibonacci e a Espiral de Fibonacci | 121 |
| Figura 46: Pentágono regular | 122 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|-----|
| Tabela 1: Reprodução dos coelhos | 110 |
| Tabela 2: Razão áurea e sequência de Fibonacci | 112 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|-------------------|-------------------------------|
| Φ | Phi |
| α | alfa |
| β | Beta |
| λ | Lambda |
| π | Pi |
| τ | Tal |
| ∞ | Infinito |
| \cup | União |
| \cap | Interseção |
| \in | Pertence |
| \notin | Não pertence |
| $:$ | Divisão |
| \pm | Mais ou menos |
| $=$ | Igual |
| \neq | Diferente |
| $>$ | Maior |
| $<$ | Menor |
| \geq | Maior igual |
| \leq | Menor igual |
| \perp | Perpendicular |
| \parallel | Paralela |
| \cong | Congruência |
| \sim | Semelhança |
| \therefore | Portanto |
| \angle | Ângulo |
| Δ | Triângulo |
| \leftrightarrow | Equivalência |
| \Rightarrow | Implicação |
| \Leftrightarrow | Se somente se |
| \mathbb{N} | Conjunto dos números naturais |
| \mathbb{Z} | Conjunto dos números inteiros |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 15 |
| 2 | CONHECIMENTOS PRELIMINARES | 18 |
| 2.1 | GEOMETRIA: CONSIDERAÇÕES INICIAIS | 18 |
| 2.1.1 | NOÇÕES PRIMITIVAS | 18 |
| 2.1.2 | RETAS | 19 |
| 2.1.3 | PLANOS | 22 |
| 2.1.4 | ÂNGULOS | 23 |
| 2.1.5 | CONGRUÊNCIAS | 26 |
| 2.1.5.1 | CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS | 27 |
| 2.1.6 | TEORIA DAS PARALELAS | 31 |
| 2.1.7 | SEMELHANÇA | 32 |
| 2.1.8 | TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA E EXTERNA | 35 |
| 2.1.9 | TEOREMA DE PITÁGORAS | 36 |
| 2.2 | RAZÃO E PROPORÇÃO | 36 |
| 2.2.1 | RAZÃO | 36 |
| 2.2.2 | PROPORÇÃO | 36 |
| 2.2.3 | PROPRIEDADES DAS PROPORÇÕES | 37 |
| 2.3 | FUNÇÃO QUADRÁTICA | 37 |
| 2.3.1 | RAÍZES DA FUNÇÃO | 38 |
| 2.4 | LIMITES | 38 |
| 2.5 | SEQUÊNCIA | 39 |
| 2.5.1 | SEQUENCIAS RECORRENTES | 39 |
| 3 | A PROPORÇÃO DIVINA..... | 41 |
| 3.1 | BREVE HISTÓRIA DA RAZÃO ÁUREA | 41 |
| 3.2 | DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO | 47 |
| 3.3 | PROVA ALGÉBRICA DA DIVISÃO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO | 50 |
| 3.4 | O NÚMERO ÁUREO | 51 |
| 3.5 | A INCOMENSURABILIDADE DO NÚMERO DE OURO | 52 |
| 3.6 | CARACTERÍSTICAS DE Φ | 54 |
| 4 | FIGURAS GEOMÉTRICAS ÁUREAS | 59 |
| 4.1 | TRIÂNGULO ÁUREO | 60 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.1.1 | CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DO TRIÂNGULO DOURADO..... | 61 |
| 4.1.2 | JUSTIFICATIVA DA CONSTRUÇÃO | 62 |
| 4.1.3 | JUSTIFICATIVA ALGÉBRICA | 64 |
| 4.1.4 | A AUTOPROPAGAÇÃO DO TRIÂNGULO ÁUREO | 65 |
| 4.2 | RETÂNGULO DE OURO | 66 |
| 4.2.1 | CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DO RETÂNGULO ÁUREO | 67 |
| 4.2.2 | JUSTIFICATIVA DA CONSTRUÇÃO | 69 |
| 4.2.3 | A AUTOPROPAGAÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO | 70 |
| 4.3 | ESPIRAL LOGARÍTMICA OU ESPIRAL ÁUREA | 72 |
| 4.3.1 | CONSTRUÇÃO DA ESPIRAL NO TRIÂNGULO ÁUREO | 73 |
| 4.3.2 | CONSTRUÇÃO DA ESPIRAL NO RETÂNGULO ÁUREO | 75 |
| 4.4 | ESPIRAL RETÂNGULAR..... | 77 |
| 4.4.1 | COMPRIMENTO DA ESPIRAL RETÂNGULAR | 79 |
| 4.5 | ÂNGULO DE OURO | 80 |
| 4.5.1 | JUSTIFICATIVA ALGÉBRICA | 81 |
| 5 | PENTÁGONO REGULAR | 83 |
| 5.1 | O PENTÁGONO: HISTÓRIA E CONSTRUÇÃO | 83 |
| 5.1.1 | CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DO PENTÁGONO REGULAR..... | 87 |
| 5.1.2 | JUSTIFICATIVA DA CONSTRUÇÃO | 88 |
| 5.2 | O PENTAGRAMA E SUAS PROPRIEDADES | 89 |
| 5.3 | DECÁGONO REGULAR..... | 106 |
| 6 | RELAÇÕES ASSOCIADAS AO NÚMERO DE OURO | 109 |
| 6.1 | SEQUÊNCIA DE FIBONACCI | 109 |
| 6.2 | OUTRAS REPRESENTAÇÕES DE Φ | 116 |
| 6.3 | A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O RETÂNGULO DE OURO | 120 |
| 6.4 | O Φ NA TRIGONOMETRIA | 122 |
| 6.4.1 | O Φ E O ÂNGULO DE 36° | 122 |
| 6.4.2 | O Φ E O ÂNGULO DE 18° | 123 |
| 7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS..... | 125 |
| | REFERÊNCIA..... | 127 |

1. INTRODUÇÃO

Existem alguns números na matemática que fascinam seus amantes e despertam a curiosidade por suas propriedades enigmáticas. Em especial, um deles é tido como uma oferta de Deus ao mundo e aparece em uma infinidade de situações dentro da Matemática e também fora dela, como na arquitetura e na arte. Esse número é o 1,61803..., que surge na forma de uma razão.

Essa razão é objeto de estudo desde os tempos mais remotos, pois se acreditava que esta representa a mais agradável proporção entre dois segmentos. Com o passar dos tempos esse número recebeu várias designações, as quais, no decorrer desta dissertação, serão utilizadas livremente, como: Número Áureo, Número de Ouro, Proporção ou Razão Áurea, Seção Áurea, *Phi* e Φ .

Talvez nenhum outro número tenha intrigado tantos estudiosos ao longo dos tempos, como o Número de Ouro intrigou por sua beleza e harmonia. Não é possível precisar quando e nem onde ele surgiu, acredita-se que na construção da grande pirâmide (no Egito) e no templo de Partenon (Grécia) os conhecimentos sobre *Phi* já tenham sido utilizados. Além disso, esse número fascinou matemáticos como Pitágoras, durante os estudos sobre a estrela pentagonal ou pentagrama, mas principalmente Euclides que foi o primeiro a formalizar uma definição para o que ele chamou de *razão extrema e média*, em sua majestosa obra, *Elementos*, escrita por volta de 300 a.C. O frade italiano Luca Pacioli foi outro estudioso a se encantar pelo Número de ouro a ponto de compará-lo a algo divino (uma oferta de Deus ao mundo), denominando a proporção que o origina de “Divina Proporção”, originando, assim, o caráter divino associado a *Phi*.

Os gregos acreditavam que o retângulo construído por meio do segmento áureo apresentava certa harmonia estética, ou seja, era mais belo, mais agradável aos olhos humanos. Hoje, é possível perceber isso em inúmeros elementos do cotidiano, por exemplo, na razão entre as medidas de cartões de crédito, pôsteres, revistas, além de diversas obras arquitetônicas (ao longo da história e atualmente), nas pinturas de inúmeros artistas em variadas épocas (como nas obras de Leonardo Da Vinci), na literatura, cinema, música, na natureza e novas tecnologias.

Curiosamente, além de se fazer presente em diversas áreas, como as citadas anteriormente, o Número de Ouro aparece também em diversas situações dentro da matemática, interagindo com áreas que vão desde a Trigonometria até a Álgebra, não ficando restrita apenas à Geometria. Assim, o objetivo deste trabalho é justamente discutir e apresentar as mais diversas situações em que esse número aparece dentro da matemática, ou seja, sua ubiquidade.

Diante do exposto, consideramos que este trabalho pode se tornar uma ferramenta importante para professores, de todos os níveis da Educação, auxiliando na preparação de atividades que abordem direta ou indiretamente o tema: Número de Ouro ou Razão Áurea, bem como para estudantes de matemática que buscam aprofundar seus conhecimentos acerca do assunto. Visto que não é um conteúdo comumente abordado em livros didáticos, além de termos, atualmente, poucas referências que tragam as várias características e propriedades desse número e suas aplicações nas várias áreas da matemática, a presente pesquisa mostra sua pertinência dentro dos estudos em matemática, tanto no âmbito acadêmico, quanto da educação básica.

Objetivando atender a essa demanda, esta dissertação foi estruturada em capítulos. No primeiro capítulo é apresentada a motivação e o objetivo do trabalho, bem como uma breve contextualização acerca de *Phi*. No capítulo dois, intitulado Conhecimentos Preliminares, são apresentados alguns conteúdos da Geometria, como teoremas, proposições e definições; e da Álgebra, limites e sequência, servindo de base nos estudos ao decorrer do trabalho. Dentre as principais referências utilizadas, destaca-se MOISE & DOWNS (1971).

O terceiro capítulo, A Proporção Divina, está estruturado com a parte histórica, abordando as primeiras possíveis aparições do Número de Ouro como, por exemplo, nas construções da Grande Pirâmide e do Templo de Partenon e os principais matemáticos que trouxeram contribuições ao estudo desse número. São apresentadas também a divisão de um segmento qualquer em média e extrema razão, provas geométricas e algébricas de como se chegar a *Phi*, sua irracionalidade dentre outras características. Nesta parte, recorreremos principalmente a LÍVIO (2011), um dos maiores estudiosos acerca do assunto.

O capítulo quatro é composto pelo estudo das chamadas Figuras Geométricas Áureas que são: o Triângulo Áureo, o Retângulo Áureo, a Espiral Áurea e o Ângulo de ouro. Nele são apresentados o passo-a-passo de suas construções e as provas geométricas e algébricas de cada construção. Neste capítulo, CONTADOR (2007) foi uma das principais fontes pesquisadas.

O quinto capítulo, Pentágono regular, é dedicado ao estudo do Decágono Regular e da principal figura geométrica áurea, a que reúne o maior número de relações áureas: o Pentágono Regular. Nele, é apresentada a parte histórica a respeito dessa figura, além da construção e justificativas algébricas e geométricas. Também são provadas algumas propriedades que envolvem os lados e diagonais do Pentágono. Para tal HUNTLEY (1985) é a principal referência utilizada.

No capítulo seis, Relações associadas ao Número de Ouro, é apresentada a relação entre uma das mais famosas sequências matemáticas, a Sequência de Fibonacci, e o Número Áureo,

com o famoso problema dos coelhos, o retângulo construído a partir dos termos da sequência de Fibonacci (o Retângulo de Fibonacci) e outras sequências. É também apresentada a aplicação do *Phi* na trigonometria, nos estudos dos senos e cossenos dos ângulos de 18° e 36° . Destacando o trabalho de ZANH (2011) como umas das principais fontes de consulta. Por fim, no último capítulo, são discutidos os resultados da pesquisa.

2. CONHECIMENTOS PRELIMINARES

O intuito deste capítulo é fornecer subsídios para o leitor, afim de facilitar a compreensão dos conteúdos que serão discutidos nos demais capítulos. Por esse motivo, serão apresentados teoremas, definições, propriedades, etc., que não serão demonstradas aqui. Caso o leitor tenha interesse nas demonstrações, poderá encontrá-las nas principais referências utilizadas no desenvolvimento desse capítulo, BARBOSA (2006), GARBI (2010), MOISE & DOWNS (1971) nas anotações sobre Geometria e GONÇALVES & FLEMMING (2006) e STEWART (2009) para os estudos de Limites e Sequências.

2.1 GEOMETRIA: CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A palavra Geometria tem sua origem na palavra grega *geometrein*. Na decomposição da palavra grega temos *geo* = terra e *metrin* = medir, portanto, originalmente, geometria é a ciência de medir terras (PINHO, 2010). Os primeiros conceitos de geometria surgiram a partir da necessidade do homem de efetuar medidas (comparar distâncias, ângulos, áreas, etc), como acreditava Heródoto (485 a 425 a.C.), geógrafo e historiador grego. (HISTORIA)

É arriscado afirmar quando e onde surgiu, pois os patrimônios são muito antigos, mais antigos até que a própria arte de escrever e os artigos dependem de muitos estudos e interpretações. Acredita-se que as principais figuras geométricas bem como as noções de ângulos e áreas já eram de conhecimento dos Egípcios, Assírios e Babilônicos (BARBOSA, 2006).

O desenvolvimento da Geometria se deu ao longo de muitos séculos. Por volta de 300 a.C., os conhecimentos geométricos foram organizados na obra chamada “*Elementos*”, escrita por Euclides de Alexandria, considerado pela literatura matemática como o “Pai da Geometria”.

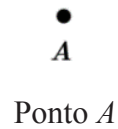
2.1.1 NOÇÕES PRIMITIVAS

Em Geometria, os entes geométricos são estabelecidos por meio de definição. Para os casos de entes primitivos vamos considerá-los indefiníveis, ou seja, sem definição. Adotaremos sem definir as noções dos seguintes entes geométricos:

PONTO, RETA e PLANO.

Notações:

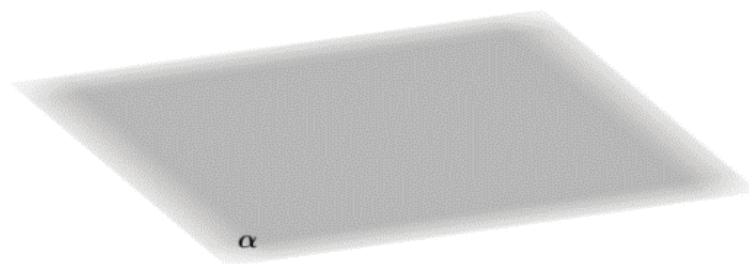
Ponto: são designados por letras maiúsculas latinas ($A, B, C, D, \dots, W, \dots$, etc.)



Reta: são designadas por letras minúsculas latinas ($a, b, c, d, \dots, w, \dots$, etc.)



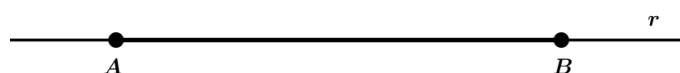
Plano: são designadas por letras gregas minúsculas ($\alpha, \beta, \delta, \dots, \sigma, \dots$, etc.)



Plano α

2.1.2 RETAS

Seja uma reta r e dois pontos distintos A e B , pertencentes a essa reta, como a imagem abaixo:



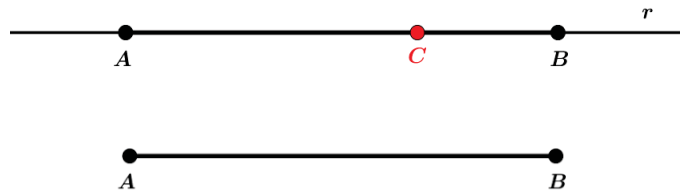
Postulado 1: Para cada par de pontos distintos, existe exatamente uma reta que os contém.

$$r = \overleftrightarrow{AB}$$

Os pontos A e B , distintos entre si, definem a reta \overleftrightarrow{AB} .

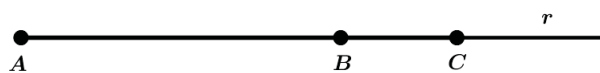
Postulado 2: Em qualquer reta estão, no mínimo, dois pontos distintos (chamados pontos colineares).

Definição: Dados dois pontos distintos sobre uma reta, a reunião do conjunto desses dois pontos e os pontos C que estão entre eles é um segmento de reta.



Definição: Dois segmentos são congruentes se possuem a mesma medida ou comprimento.

Definição: Semirreta é cada uma das duas partes em que uma reta é dividida por um ponto qualquer pertencente a ela.



O ponto A é a origem da semirreta \overrightarrow{AB} .

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C / A - B - C\}$$

Definição: Duas retas distintas coplanares ou não se interceptam ou se interceptam em um único ponto.

Postulado 3: (Postulado da distância) A todo par de pontos distintos corresponde um único número positivo.

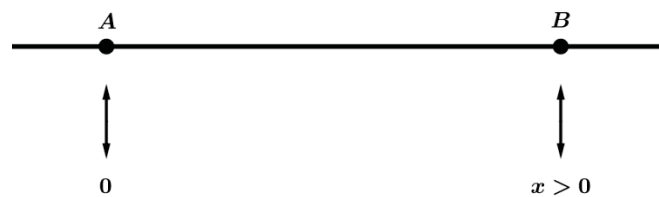
Definição: A distância entre dois pontos é o número descrito pelo Postulado da Distância.

Postulado 4: (O Postulado da Régua) Os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência (biunívoca) com os números reais, de modo que:

- (I) a cada ponto da reta corresponde um único número real;
- (II) a cada número real corresponde um único ponto da reta;
- (III) a distância entre dois pontos quaisquer é o valor absoluto da diferença dos números correspondentes.

Definição: A correspondência descrita no Postulado da Régua é denominada um Sistema de Coordenadas. Um número correspondente a um dado ponto é chamado de coordenada do ponto.

Postulado 5: (O Postulado de Colocação da Régua) Dados dois pontos A e B numa reta, o sistema de coordenadas pode ser escolhido de modo que a coordenada de A seja zero e a coordenada de B seja um número real positivo.



Definição: C está entre A e B se:

- (I) A , B e C são pontos distintos de uma reta;
- (II) $AC + CB = AB$.

Notação:

$$A - C - B \text{ ou } (B - C - A)$$



Definição: Um ponto C é ponto médio do segmento \overline{AB} se:

- (I) $A - C - B$

$$(II) \ AC = CB$$



Proposição: Todo segmento possui um único ponto médio.

Definição: O conjunto de todos os pontos é chamado de espaço.

Definição: Um conjunto de pontos é chamado de colinear se existe uma reta que contém todos os pontos do conjunto.

Postulado 6: Existem pelo menos três pontos distintos não colineares.

2.1.3 PLANOS

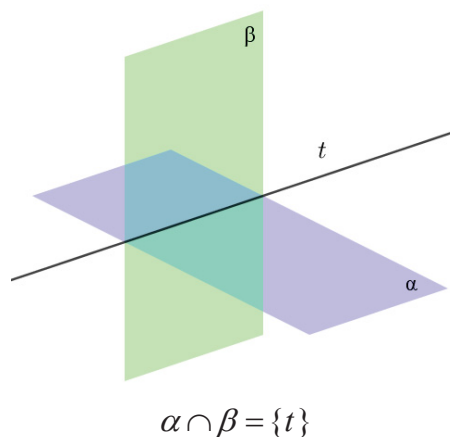
Postulado 7: (Postulado do Plano) Três pontos quaisquer pertencem pelo menos a um plano e três pontos não colineares quaisquer pertencem a exatamente um plano.

Definição: Um conjunto de pontos é chamado de coplanar se existe um plano que contém todos os pontos do conjunto.

Teorema: Dados uma reta e um ponto fora da reta, existe exatamente um plano que os contém.

Teorema: Dados duas retas que se interceptam, existe exatamente um plano que as contém.

Postulado 8: Se dois planos distintos se interceptam, a interseção é uma reta.



Postulado 9: (Postulado de Separação do Plano) Dados uma reta r e um plano α que a contém, os pontos do plano que não pertencem a reta r formam dois conjuntos α_1 e α_2 , tais que:

(I) α_1 e α_2 são conjuntos convexos;

(II) Se $P \in \alpha_1$ e $Q \in \alpha_2 \Rightarrow \overline{PQ} \cap r \neq \emptyset$.

Definição: Os conjuntos α_1 e α_2 , descritos no postulado acima, são chamados de semiplanos (ou lados de r) e a reta r é chamada de origem de cada um deles.

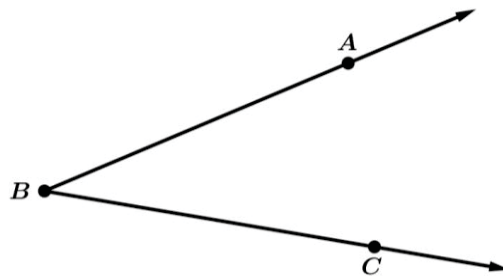
2.1.4 ÂNGULOS

Se duas semirretas tiverem a mesma origem, mas não estão contidas na mesma reta, então a reunião dessas duas semirretas é chamada de ângulo.

Notação:

$$\hat{A}BC \text{ ou } \hat{C}BA \text{ ou } \angle ABC \text{ ou } \angle CBA \text{ ou } \hat{B}$$

As semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} são chamados de lados do ângulo e B é o seu vértice.



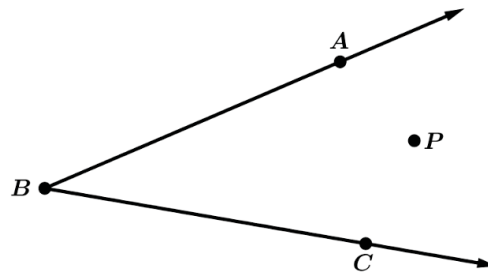
Definição: Seja o ângulo $\angle ABC$ e P um ponto, dizemos que P está no interior do ângulo $\angle ABC$ se:

(I) P e A estão do “mesmo lado” da semirreta \overrightarrow{BC} ;

(II) P e C estão do “mesmo lado” da semirreta \overrightarrow{BA} .

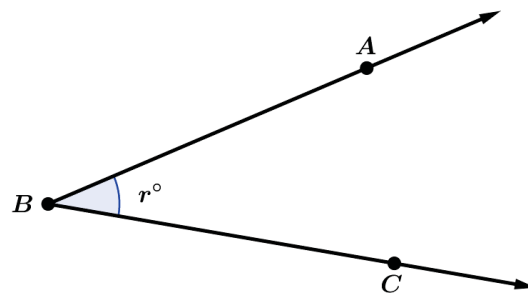
Notação:

$$P \in \text{int}(\angle ABC)$$



Definição: O exterior do ângulo $\angle ABC$ é o conjunto dos pontos que não estão no ângulo $\angle ABC$ e no seu interior.

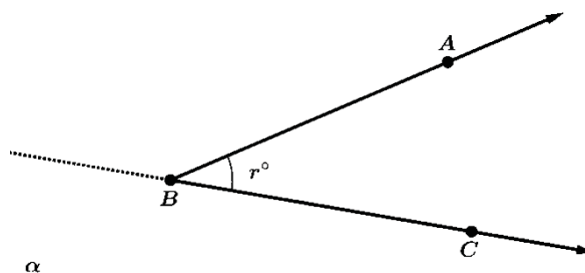
Postulado 7: (Postulado da Medida do Ângulo) A todo ângulo $\angle ABC$ corresponde um número real $r \in (0, 180)$.



O número r descrito acima é chamado de medida do $\angle ABC$ e escrevemos:

$$r = m(\angle ABC)$$

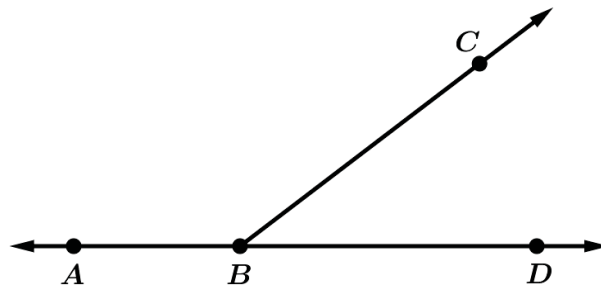
Postulado 8: (Postulado da Construção do Ângulo) Seja \overrightarrow{BA} uma semirreta, contida na origem de um semiplano α , então, para todo número $r \in (0, 180)$ existe uma única semirreta \overrightarrow{BC} tal que $m(\angle ABC) = r$.



Postulado 9: (Postulado da Adição de ângulos) Se $P \in \text{int}(\angle ABC)$, então:

$$m(\angle ABC) = m(\angle ABP) + m(\angle PBC)$$

Definição: Se \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BD} são semirretas opostas e \overrightarrow{BC} é outra semirreta qualquer ($C \notin \overrightarrow{AB}$), então os ângulos $\angle ABC$ e $\angle DBC$ formam um par linear.

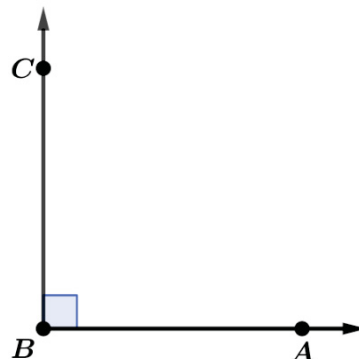


Definição: Se a soma das medidas de dois ângulos é 180° , os ângulos são chamados de suplementares.

Postulado 10: (Postulado do Suplemento) Se dois ângulos formam um par linear então são suplementares.

Definição: Um ângulo é reto se a sua medida é 90° .

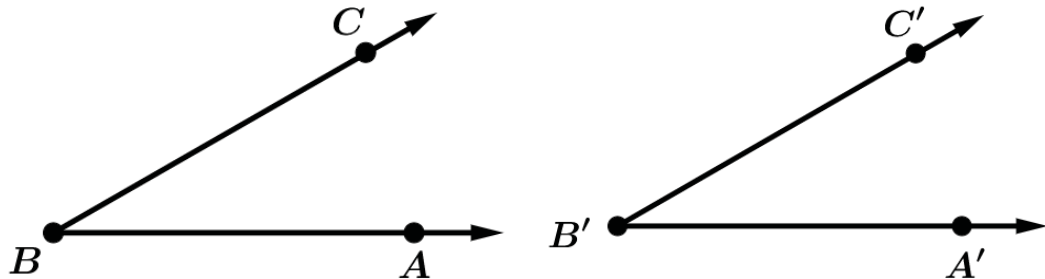
Definição: Se \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} formam um ângulo reto, então \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} são chamados de perpendiculares.



$$\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$$

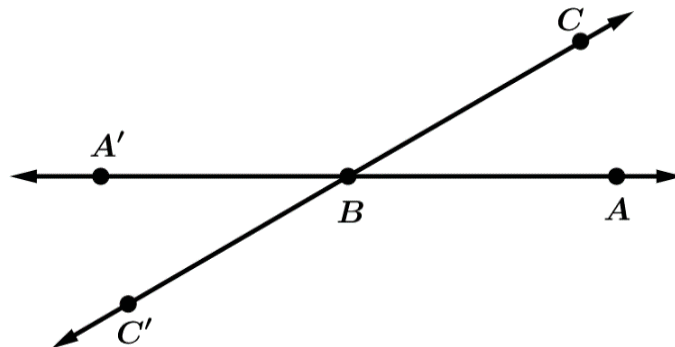
Definição: Se a soma das medidas de dois ângulos é 90° , os ângulos são chamados de complementares.

Definição: Dois ângulos de mesma medida são chamados de ângulos congruentes.



$$\angle ABC \cong \angle A'B'C' \Leftrightarrow m(\angle ABC) = m(\angle A'B'C')$$

Definição: Dois ângulos são chamados de opostos pelo vértice se os seus lados formam dois pares de semirretas opostas.



$\angle ABC$ e $\angle A'BC'$ são opostos pelo vértice

$\angle A'BC$ e $\angle ABC'$ são opostos pelo vértice

Definição: Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

2.1.5 CONGRUÊNCIAS

As figuras que estão sobre um plano e compostas por poligonais fechadas são chamadas de polígonos. Os segmentos de reta que compõem as poligonais são os lados, os pontos de interseção desses lados são os vértices. A nomenclatura dos polígonos é dada de acordo com a

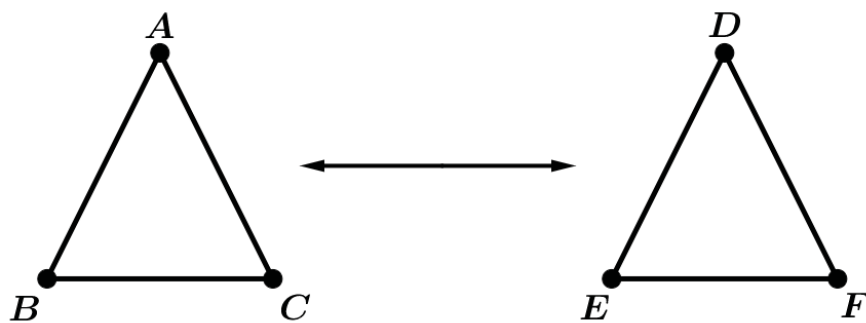
quantidade de lados ou quantidade de ângulos, por exemplo, um polígono de três lados recebe o nome de trilátero; o de quatro lados, quadrilátero; o de cinco, pentalátero, e assim por diante.

Notação:

$\triangle ABC$ (Triângulo ABC)

2.1.5.1 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Seja a correspondência entre os vértices dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$,

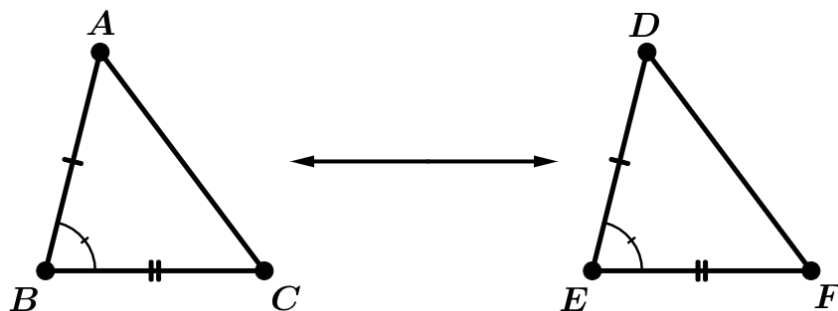


Se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de tal forma que os lados correspondentes sejam congruentes e os ângulos correspondentes também sejam congruentes, então tal correspondência é chamada de congruência.

Notação:

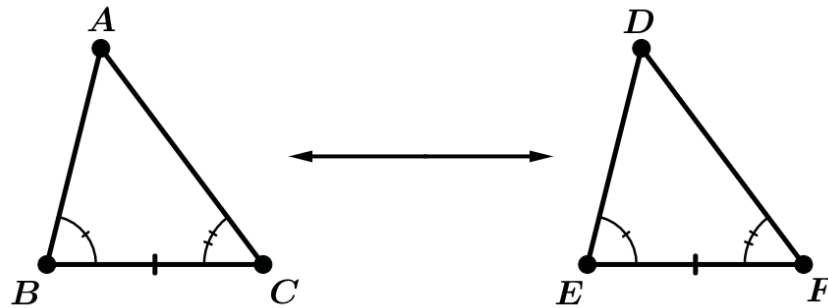
$$\begin{aligned} \triangle ABC \cong \triangle DEF \Leftrightarrow & \begin{aligned} & AB \cong DE \quad A \cong D \\ & BC \cong EF \quad e \quad B \cong E \\ & AC \cong DF \quad C \cong F \end{aligned} \end{aligned}$$

Postulado 11: (1º caso de congruência de triângulos ou caso LAL) Dados dois triângulos, toda correspondência lado – ângulo – lado ou LAL é uma congruência.



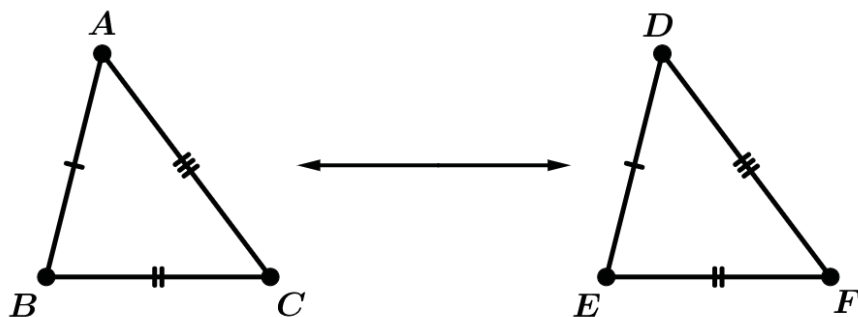
$$\begin{array}{l}
 AB \cong DE \\
 \text{Se } \angle B \cong \angle E \text{ então } \triangle ABC \cong \triangle DEF \\
 BC \cong EF
 \end{array}$$

Teorema: (2º caso de congruência de triângulos ou caso ALA) Dados dois triângulos, toda correspondência ângulo – lado – ângulo ou ALA é uma congruência.



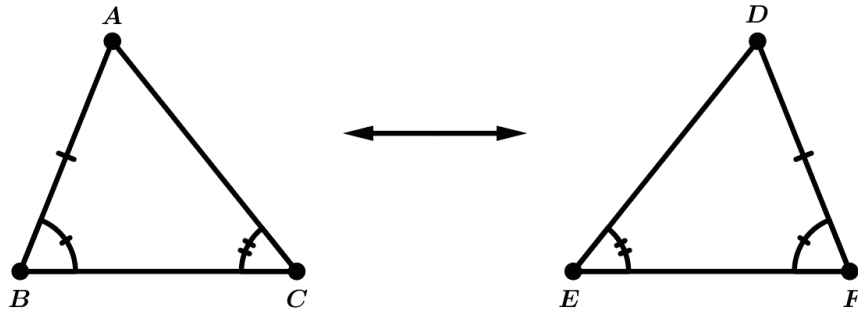
$$\begin{array}{l}
 \angle B \cong \angle E \\
 \text{Se } BC \cong EF \text{ então } \triangle ABC \cong \triangle DEF \\
 \angle C \cong \angle F
 \end{array}$$

Teorema: (3º caso de congruência de triângulos ou caso LLL) Dados dois triângulos, se ambos possuem os três pares de lados correspondentes congruentes, dizemos então que os triângulos são congruentes.



$$\begin{array}{l}
 AB \cong DE \\
 \text{Se } BC \cong EF \text{ então } \triangle ABC \cong \triangle DEF \\
 AC \cong DF
 \end{array}$$

Teorema: (4º caso de congruência de triângulos ou caso LAA_o) Dados dois triângulos, toda correspondência lado – ângulo – ângulo oposto ou LAA_o é uma congruência.



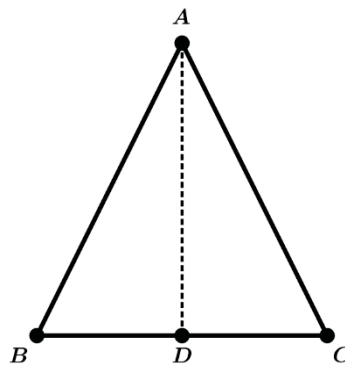
$$\begin{aligned}
 &AB \cong DF \\
 \text{Se } &B \cong F \quad \text{então } \triangle ABC \cong \triangle DEF \\
 &C \cong E
 \end{aligned}$$

Teorema: Um triângulo que possui dois lados congruentes é chamado de triângulo isósceles. Os lados congruentes são também chamados de laterais e o terceiro lado é a base.

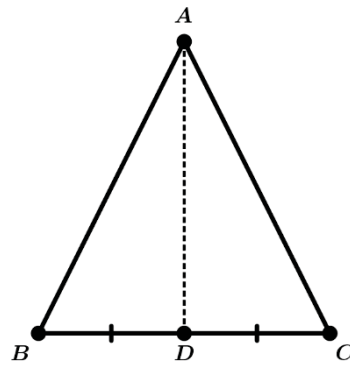
Teorema: Se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então o triângulo é isósceles.

Teorema: (Teorema Pons Asinorum) em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

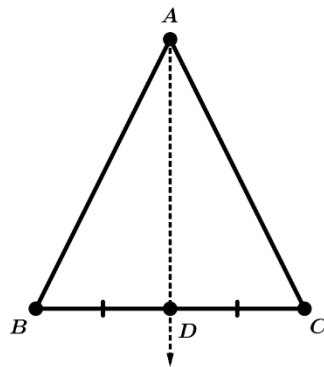
Definição: Seja o triângulo $\triangle ABC$,



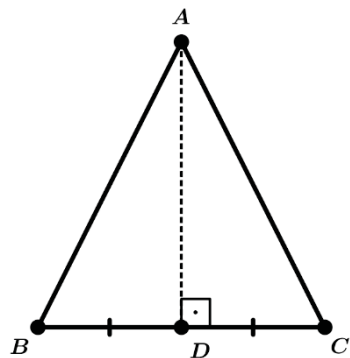
(I) Se $BD \cong DC$ então AD é a **mediana** relativa ao lado BC .



(II) Se a semirreta \overrightarrow{AD} “divide” o ângulo A em dois ângulos congruentes, então \overrightarrow{AD} é a **bissetriz** do ângulo A .

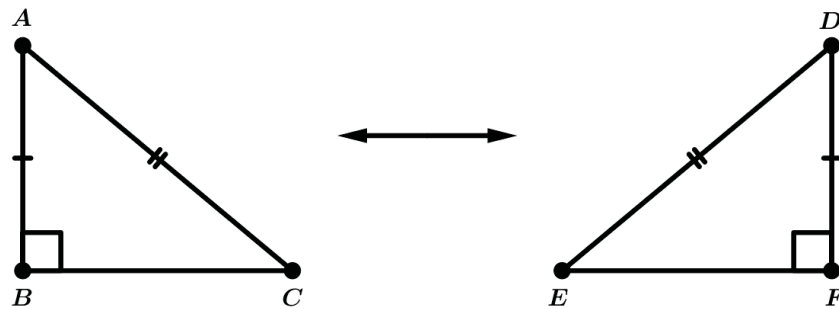


(III) Se $AD \perp BC$ então AD é a **altura** relativa do lado BC .



Proposição: Em todo triângulo isósceles a mediana relativa a base é também bissetriz e altura.

Proposição: (Congruência de triângulos retângulos) sejam os triângulos retângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$:



$$\begin{aligned}
 & B \cong F = 90^\circ \\
 & \text{Se } AB \cong DF \quad \text{então } \triangle ABC \cong \triangle DEF \\
 & AC \cong DE
 \end{aligned}$$

2.1.6 TEORIA DAS PARALELAS

O V postulado ou postulado das paralelas do livro I de Elementos é o mais famoso dos postulados de Euclides.

V Postulado: Se uma reta t corta duas outras r e s (todas num mesmo plano) de modo que um dos pares de ângulos colaterais internos tem soma inferior a dois ângulos retos, então as retas r e s , quando prolongadas suficientemente, se cortam do lado de t em que se encontram os referidos ângulos colaterais internos.

Segundo Mol (2013, pg. 73) “Entre os gregos, esse problema já era conhecido como o *quarto problema famoso da geometria*”. Até a primeira metade do século XIX, o postulado levantou muita polêmica entre os matemáticos por ter uma estrutura particular (pelo “tamanho” do enunciado) e ser bem diferente dos outros postulados (não é “auto-evidente”), como afirma Bicudo (2005, pg. 13),

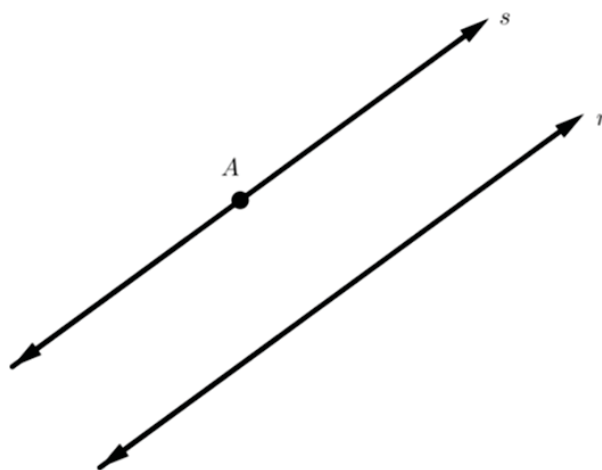
Não exige qualquer esforço a aceitação dos dois primeiros [postulados] como abstração de nossa experiência no traçado de retas, fazendo uso de régua. Do mesmo modo, o terceiro representa nossa experiência com a utilização de um compasso. Talvez o quarto postulado seja o menos imediato, como uma abstração, mas, por certo, é derivado da nossa experiência com medidas de ângulo e com a constatação de que, se dois ângulos retos quaisquer forem adjacentes, os lados não comuns estarão sobre uma reta. O V Postulado é diferente, pois não podemos, pela experiência, saber se as retas se encontrarão ou não, uma vez que a experiência só nos permite traçar segmentos. Podemos estender os segmentos mais e mais, porém não eternamente. Além do que, sabemos que duas linhas podem se aproximar ilimitadamente sem nunca se encontrarem [...]. O V Postulado afirma que isso não acontece com duas linhas retas, o que, para todos os efeitos da experiência, não era intuitivamente claro.

Durante séculos, foram inúmeros os matemáticos que tentaram provar tal postulado, dentre os mais famosos, podemos citar Proclus (485 a 410 a.C.), John Wallis (1616 a 1703) e Carl F. Gauss (1777 a 1855).

Após inúmeros fracassos, chegaram à conclusão de que o V postulado não poderia ser demonstrado (a partir dos quatro anteriores), mas era extremamente importante e independente dos demais. Isso só veio a ocorrer no século XIX, baseado nos estudos do padre jesuíta G. Saccheri (1667 a 1733) que, sem saber, acabou por descobrir novas geometrias, apesar de seu trabalho ter sido ignorado durante mais de um século. Depois esses estudos foram aprofundados por Bolyai (1802 a 1860) e Lobachewski (1793 a 1856) que admitiram a negação do postulado das paralelas e o substituíram por uma afirmação contraditória, desenvolvendo assim a Geometria Hiperbólica. Friedrich B. Riemann (1826 a 1866), em 1854, baseado no V postulado, desenvolveu a Geometria Esférica. Essas geometrias são conhecidas como Geometrias Não-Euclidianas. (MOL, 2013)

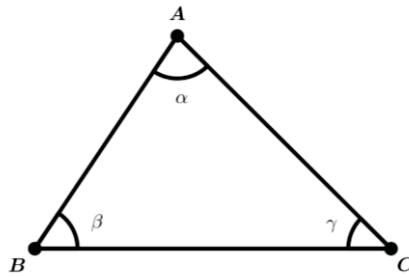
Portanto, podemos afirmar que o V postulado é um dos mais importantes da Geometria Euclidiana, pois é o que a difere das demais geometrias.

Postulado 12: (Postulado das Paralelas) Dados no plano uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma e somente uma reta s com $A \in s$ e $s \parallel r$.



2.1.7 SEMELHANÇA

Teorema: A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Definição: Dada uma correspondência entre os vértices de dois triângulos

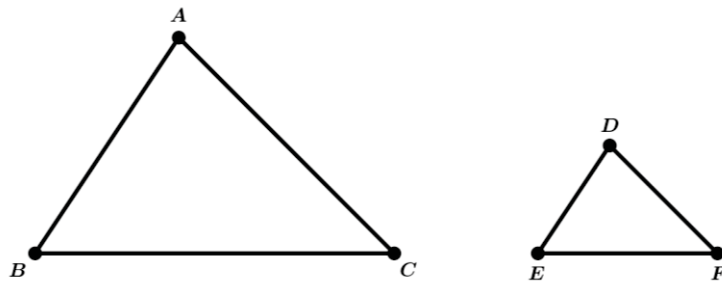
$$ABC \leftrightarrow DEF$$

se os ângulos correspondentes forem congruentes e os lados correspondentes forem proporcionais, dizemos que a correspondência é uma semelhança e dizemos então que os triângulos são semelhantes.

Notação:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

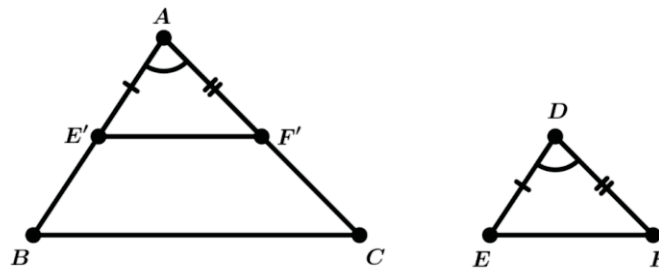
Dizer que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



significa dizer que:

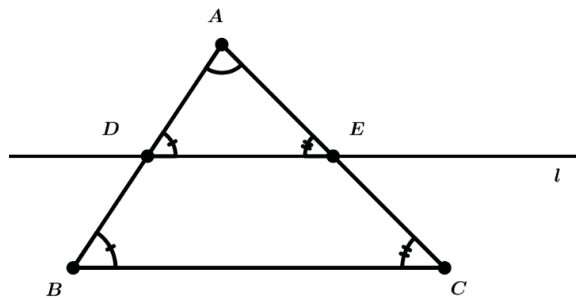
$$\begin{aligned} A &\cong D \\ B &\cong E \text{ e } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k \quad (k > 0) \\ C &\cong F \end{aligned}$$

Teorema: (O teorema de semelhança A.A.A.) Dada a correspondência $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$. Se os ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.



Corolário: Se dois triângulos possuem dois pares de ângulos congruentes, então eles são semelhantes.

Corolário: Dado $\triangle ABC$. Se $l \parallel BC$ e l intercepta os lados AB e AC em E e D respectivamente, então $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.



Teorema: (O teorema de semelhança L.A.L.) Dada a correspondência $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$,

$$\text{Se } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \text{ e } \angle A \cong \angle D \text{ então } \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Teorema: (O teorema de semelhança L.L.L.) Dada a correspondência $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$,

$$\text{Se } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k \text{ então } \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Teorema: A altura corresponde à hipotenusa de qualquer triângulo retângulo e divide-o em dois triângulos que são semelhantes um ao outro e também semelhantes ao triângulo original.

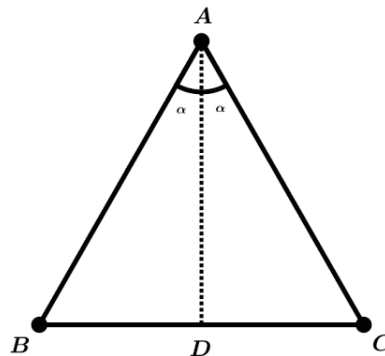
Corolário: Em um triângulo retângulo,

- (I) a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre os segmentos em que é dividida a hipotenusa e
- (II) cada cateto é a média geométrica entre hipotenusa e o segmento da hipotenusa que é a projeção deste cateto sobre ela;
- (III) o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

2.1.8 TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA E EXTERNA

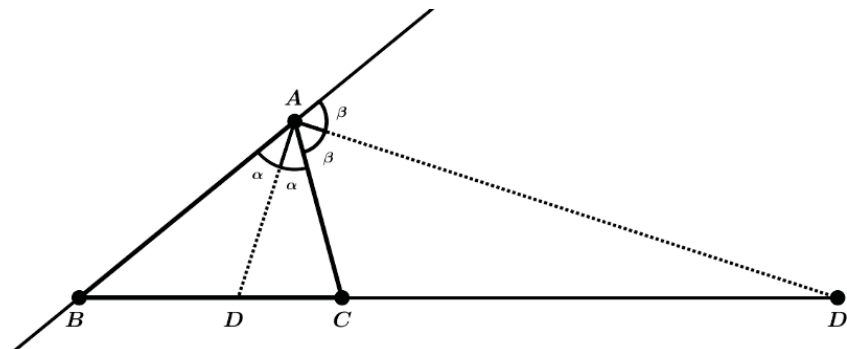
Teorema: (Teorema da Bissetriz Interna) Seja o triângulo $\triangle ABC$ e \overline{AD} a bissetriz interna do ângulo A , então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$$



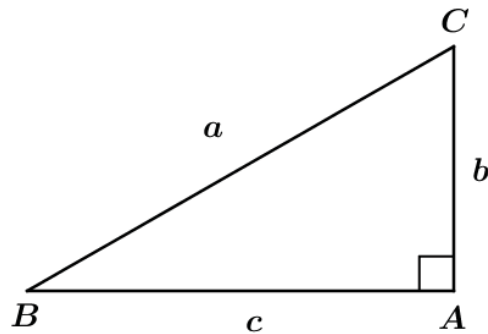
Teorema: (Teorema da Bissetriz Externa) seja o triângulo $\triangle ABC$ e \overline{AD} bissetriz interna do ângulo A e $\overline{AD'}$ bissetriz externa do ângulo A , então:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BD'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CD'}}$$



2.1.9 TEOREMA DE PITÁGORAS

Teorema: Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Teorema: Se em um triângulo retângulo vale que $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo e o maior lado se opõe ao maior ângulo.

2.2 RAZÃO E PROPORÇÃO

2.2.1 RAZÃO

Definição: Dados dois números (a e b), dizemos que a razão entre a e b ($b \neq 0$) é o quociente de a por b .

Notação:

$$\frac{a}{b} \text{ ou } a : b, \text{ onde } b \neq 0$$

2.2.2 PROPORÇÃO

Definição: Dados quatro números reais (a , b , c e d) e diferentes de zero, em certa ordem, se a razão entre os dois primeiros for igual à razão entre os dois últimos, dizemos que os números a , b , c e d , nesta ordem, formam uma proporção.

Notação:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

2.2.3 PROPRIEDADES DAS PROPORÇÕES

Seja a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Valem as seguintes propriedades:

(I) O produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$ad = bc$$

(II) A soma (diferença) dos dois primeiros termos está para o primeiro termo, assim como a soma (diferença) dos dois últimos está para o terceiro termo.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \quad \text{e} \quad \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

(III) A soma (diferença) dos dois primeiros termos está para o segundo termo, assim como a soma (diferença) dos dois últimos está para o quarto termo.

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \text{e} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

(IV) A soma (diferença) dos antecedentes está para a soma (diferença) dos consequentes, assim como cada antecedente está para seu consequente.

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$$

2.3 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição: Uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de função quadrática ou do 2º grau quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$. Isto é $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \rightarrow ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

2.3.1 RAÍZES DA FUNÇÃO

Definição: As raízes reais da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$ e, portanto, as soluções da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$. Dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ; \text{ com } b^2 - 4ac \geq 0$$

2.4 LIMITES

Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo aberto I , contendo a , exceto, possivelmente, no próprio a . Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a é L e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre $0 < |x - a| < \delta$.

Proposição: Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem, e c é um número real qualquer, então:

$$(I) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(II) \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$(III) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(IV) \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ com } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

2.5 SEQUÊNCIA

Definição: Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função

$$A \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow a_n$$

Cujo domínio é um subconjunto de \mathbb{N} .

Notação:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Onde o número a_1 é chamado de primeiro termo, a_2 o segundo termo e assim segue até a_n o n -ésimo termo.

Definição: Uma sequência $\{a_n\}$ possui limite L e escrevemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ ou } n \rightarrow \infty \Rightarrow a_n \rightarrow L$$

se, tomando n suficientemente grande, os termos a_n se aproximarem ao máximo de L . Assim, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe, dizemos que a sequência $\{a_n\}$ é convergente (ou converge). Caso contrário, dizemos que a sequência é divergente (ou diverge).

2.5.1 SEQUENCIAS RECORRENTES

Definição: Uma sequência é dita recorrente se cada termo for definido em função de dois outros termos anteriores.

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Definição: Uma sequência é dita homogenia se cada termo depende exclusivamente dos anteriores. Se cada elemento da sequência está em função de dois anteriores e de um termo independente, a recorrência é dita não homogênea.

Para que a sequência fique bem definida é necessário conhecer os primeiros termos a partir dos quais os próximos serão encontrados.

Definição: Dizemos que uma recorrência é linear quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear.

Definição: Uma recorrência de primeira ordem é uma recorrência em que cada termo da sequência é obtido a partir do termo imediatamente anterior.

$$a_{n+1} = pa_n, \text{ com } p \neq 0 \text{ e } a_n \neq 0$$

Definição: Uma recorrência linear é de segunda ordem se cada termo da sequência é obtido a partir dos dois termos imediatamente anteriores a ele.

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0, \text{ com } q \neq 0$$

O objetivo ao resolver uma relação ou equação de recorrência é encontrar uma expressão (ou fórmula fechada) capaz de fornecer cada termo a_n da sequência apenas em função n . Tal expressão é chamada de solução da recorrência.

Para a resolução de uma recorrência linear de segunda ordem homogenia, associamos a seguinte equação:

$$x^2 + px + q = 0$$

que é chamada de equação característica da recorrência. Em particular, se $q \neq 0$ significa que zero não é raiz da equação.

Teorema: Seja a recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ e sejam x_1 e x_2 as raízes da equação característica $x^2 + px + q = 0$, então $a_n = Ax_1^n + Bx_2^n$ para quaisquer valores reais de A e B .

3 A PROPORÇÃO DIVINA

3.1 BREVE HISTÓRIA DA RAZÃO ÁUREA

A história da Razão Áurea se confunde no período da Antiguidade, não se sabe ao certo onde e nem quando a tal razão surgiu e/ou foi utilizada pela primeira vez. Acredita-se que ela tenha sido usada em quase todos os impérios da antiguidade, em obras literárias e arquitetônicas, como afirma Contador (2007, pg. 97),

[...] os egípcios, por volta de 5000 a.C. já conheciam a relação áurea. Em desenhos primitivos ou rupestres encontra-se a proporção áurea, não que os nossos ancestrais tivessem tal consciência geométrica, mas com certeza a instruíram, na especulação de beleza e na forma das proporções.

A Grande Pirâmide de Gizé (ou Pirâmide de Quéops), localizada no Egito e construída por volta de 2550 a.C., possui resquícios da razão áurea em sua construção. Gazalé (apud LIVIO, 2016, pg. 72) relata que Heródoto, historiador grego que viveu por volta de 485 a.C. a 425 a.C. e considerado o “Pai da História”, “aprendeu com os sacerdotes egípcios que o quadrado da altura da Grande Pirâmide é igual à área da sua face lateral triangular”. Tal afirmação tornou-se objeto de discórdia entre diversos estudiosos, como Herz-Fischler e George Markowsky, que acreditam ser essa uma interpretação equivocada do que disse Heródoto. Contudo, não nos aprofundaremos em tal discussão, o importante para nós nesta pesquisa é saber se realmente pode haver alguma relação entre a Grande Pirâmide de Gizé e a Razão Áurea.

Fazendo alguns cálculos elementares, é possível encontrarmos um valor para tal razão bem próximo ao da Razão Áurea. Como a base da pirâmide não é um quadrado perfeito, vamos considerar a média aritmética dos comprimentos que é 230,36 metros, mas como queremos sua metade, consideramos 115,18 metros. Como a pirâmide tem altura igual a 146,73 metros, pelo Teorema de Pitágoras, encontramos a altura do triângulo da face, 186,54 metros. Portanto,

$$\frac{186,54}{115,18} = 1,619\dots, \text{ que é um número bem próximo da Razão Áurea.}$$

Figura 1: Grande Pirâmide de Gizé, no Egito



Fonte: foto pixabay/ publicdomainpictures/ creative commons

De acordo Zahn (2011, pg. 25), a Razão Áurea também foi encontrada em um dos documentos mais antigos da história da matemática,

Um dos primeiros registros que se tem conhecimento sobre a razão áurea data de aproximadamente 1650 a.C.; é no Papiro de Rhind, um documento no qual constam 85 problemas copiados por um escriba chamado Ahmes, de um trabalho antigo ainda. Neste texto, cita-se “razão sagrada” que acredita tratar-se da razão áurea.

Figura 2: Parte do Papiro de Rhind (Egípcio) ou Ahmes (Museu Britânico-Londres)

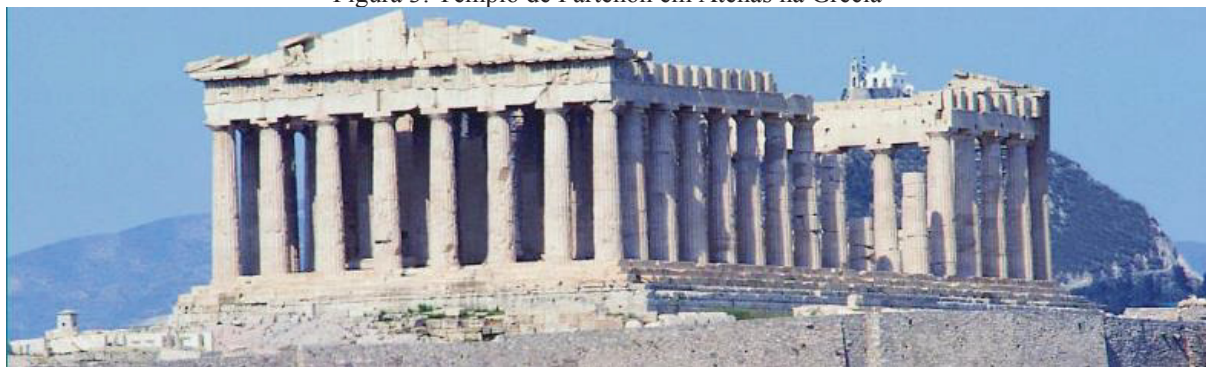


Fonte: ZAHN, 2011, pg. 25

Em Atenas, na Grécia, por volta de 447 a.C., uma equipe de arquitetos e artistas, liderada pelo então escultor Phidias, foi designada a projetar um templo destinado à deusa protetora da cidade, Atena. O templo, que ficou conhecido como Partenon (“o lugar da virgem” em grego), é considerado uma obra majestosa, de grande pureza e perfeição. Suas medidas guardam uma

peculiaridade um tanto quanto curiosa, muitos autores defendem que tais medidas seguem uma proporção específica entre as partes, a Razão Áurea.

Figura 3: Templo de Partenon em Atenas na Grécia



Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/hfe/protagoras2/links/partenon.htm>, acesso em: 07/03/19

O filósofo e matemático grego Pitágoras (569 a 500 a.C.) e seus discípulos (os pitagóricos) observaram a ocorrência de determinadas combinações e relações entre números para explicar a harmonia entre a alma e o cosmo. Além disso, um fato familiar à escola de Pitágoras é com relação às faces do dodecaedro regular, alguns estudiosos dizem que a razão áurea foi descoberta no pentágono regular (que compõe as faces do dodecaedro). Segundo Ávila (1985, pg. 115), o pentágono “exibe uma surpreendente profusão de segmentos na razão áurea. Talvez este tenha sido o motivo que levou os pitagóricos a adotarem o pentagrama (pentágono regular estrelado) como símbolo de sua seita”.

Acredita-se ainda que “o matemático grego Hipasos de Metaponto descobriu, no século V a.C., que a razão áurea é um número que não é nem inteiro [...] nem razão de dois números inteiros” (LÍVIO, 2006, pg. 14-15), ou seja, é incomensurável, não pode ser escrito na forma de fração (com números racionais) e, portanto, ela era um número irracional. Não se sabe ao certo se a descoberta da incomensurabilidade se deu nos estudos da Razão Áurea ou se foi nos estudos do teorema de Pitágoras aplicado à diagonal de um quadrado. Tal descoberta assombrou a comunidade pitagórica e grega no geral, pois acabara de demolir toda “fé” que eles tinham nos inteiros (BOYER, 1996).

Apesar de atribuída aos pitagóricos, a primeira definição dessa razão foi formalizada por Euclides de Alexandria em uma obra enciclopédica chamada *Elementos*, a qual é composta por treze partes chamadas “livros”, em que, possivelmente, cada uma corresponde a um longo rolo de papiro (Berlinghoff & Gouvêa, 2010). Nesses livros estão dispostos axiomas, postulados e proposições de Geometria e Teoria de Números que foram deduzidos seguindo uma sequência lógico-dedutiva.

Figura 4: Elementos de Euclides segundo uma ilustração medieval



Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/hfe/momentos/museu/matematica.htm>. Acesso em: 07/03/19

A Razão Áurea aparece em diversos momentos em *Elementos* como *razão extrema e média*. É definida no livro II (proposição 11), de maneira não muito clara e direta, relacionando a áreas. No livro IV essa razão é utilizada na construção do pentágono. No livro VI (proposição 30) já é apresentada uma definição mais clara da proporção. E no livro XIII aparece na construção do icosaedro e do dodecaedro.

No livro IV, Euclides determina e prova a *extrema e média razão* ou razão áurea,

Cortar a reta finita dada em extrema e média razão.

Seja a reta finita dada AB; é preciso então, cortar a reta AB em extrema e média razão. Fique descrito sobre a AB o quadrado BC, e fique aplicado à AC o paralelogramo CD igual a BC, excedente pela figura AD semelhante a BC. Mas o BC é um quadrado; portanto, também a AD é um quadrado. E, como o BC é igual a CD, fique subtraído o CE comum; portanto, o BF restante é igual à AD restante. Mas também é equiângulo com ela. Portanto, os lados, à volta dos ângulos iguais, dos BF, AD são inversamente proporcionais; portanto, como a FE está para ED, assim como a AE está para EB. Mas por um lado, FE é igual à AB, e, por outro lado, a ED, à AE. Portanto, como a BA está para AE, assim a AE para EB. Mas a AB é maior do que a AE; portanto, também a AE é maior do que a EB. Portanto, a reta AB foi cortada em extrema e média razão no E, e o maior segmento dela é o AE; o que era preciso fazer. (EUCLIDES, 2009, pg. 263).

Ao longo dos tempos, muitos matemáticos se dedicaram ao estudo e/ou busca de propriedades dessa fascinante proporção. Matemáticos como Hipsicles de Alexandria (190 a.C. a 120 a. C.) e Apolônio de Perga (262 a.C. a 190 a.C.) trouxeram importantes contribuições acerca do assunto. De acordo com Livio (2006, pg. 105), em

[...] o “Suplemento” de *Elementos* (muitas vezes mencionado como livro XIV) contém um importante teorema sobre um dodecaedro e um icosaedro circunscritos pela mesma esfera. O texto de “Suplemento” é atribuído a Hipsicles de Alexandria [...], mas acredita-se que contenha teoremas de Apolônio de Perga [...].

Hero (10 d.C. a 70 d.C.), em seu trabalho chamado *Metrica*, desenvolveu aproximações de área e volume do pentágono e decágono e dodecaedro e icosaedro, respectivamente. Ptolomeu (100 d.C. a 179 d.C.), utilizando ângulos presentes no pentágono, ou seja, 36° , 72° e 108° (além de outros também), fazia o cálculo de comprimentos de corda ligando dois pontos num círculo. Pappus de Alexandria (290 d.C. à 350 d.C.), utilizando a razão áurea, fez comparações entre os volumes dos sólidos de Platão, tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, além de propor uma maneira de construção dos dois últimos (LIVIO, 2006).

Até agora, vimos possíveis aparições da proporção áurea e alguns matemáticos que contribuíram com o seu estudo, todas as ocorrências, até o presente momento, se deram no Egito ou na Grécia. Houve, porém, um tempo em que os estudos sobre a Razão Áurea sofreram uma pausa. Isso foi durante o período de destruição promovida pelos romanos e cristãos que culminou com a destruição, por exemplo, da grande biblioteca de Alexandria e até mesmo da Academia de Platão.

Com isso, durante o século VIII, entra em cena a onda intelectual islâmica que trouxe importantes contribuições algébricas, mas não abordou muito a Razão Áurea. Com exceção dos trabalhos desenvolvidos por Al-Khwārizmī (780 d.C. a 850 d.C.) e Abu Kamil Shuja (850 d.C. a 930 d.C.). Al-Khwārizmī, na resolução de um problema proposto, fez uso de uma equação semelhante a que representa ou define a Proporção Áurea. Já Abu Kamil Shuja propôs cerca de vinte problemas envolvendo o pentágono e o decágono e solucionou a maioria desses problemas utilizando a Razão Áurea. Além disso, suas obras, segundo os pesquisadores, foram utilizadas como base para alguns trabalhos de Leonardo de Pisa ou Fibonacci (como era mais conhecido).

O italiano Fibonacci (1175 d.C. a 1250 d.C.) é considerado por muitos estudiosos como o primeiro grande matemático europeu e o mais talentoso do ocidente na idade média. Em 1202, publicou sua obra prima, *Liber Abaci*, o mais famoso e reconhecido dos trabalhos. Segundo Livio (2006, pg. 115),

O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo, mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações.

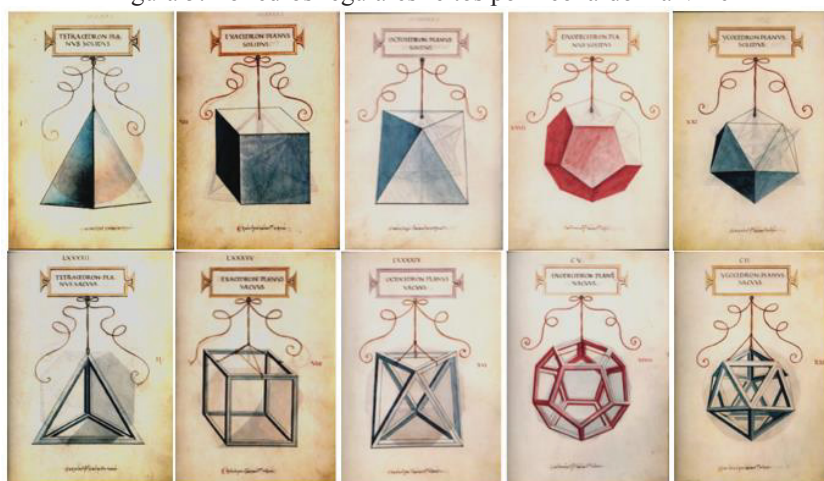
O problema acima mencionado está relacionado à reprodução de coelhos, e consiste no seguinte,

Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá a luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? (FIBONACCI, 1202 apud LÍVIO, 2007, p.116).

O resultado desse problema é uma sequência em que todo termo, após o segundo, é igual à soma dos dois que o precedem, ou seja, é obtido de modo recursivo (tal sequência recebeu o nome de sequência de Fibonacci e sua resolução detalhada será retomada mais adiante, no capítulo 6). Mas que relação essa sequência tem com a Proporção Áurea? O quociente entre um número dessa sequência e seu precedente se aproxima do número de ouro conforme a sequência avança para números cada vez maiores.

Outro notável matemático a estudar a razão áurea foi o frade franciscano Luca Pacioli (1445 d.C. a 1517 d.C.). Ele acreditava que a razão áurea era uma manifestação divina e, por isso, intitulou uma de suas obras de *De divina proportione* (“A proporção divina”), que foi publicada em 1509. Na obra, Pacioli relacionou as proposições dos *Elementos* (de Euclides) com a Razão Áurea, as propriedades dos sólidos platônicos (os poliedros regulares) e a descrição de outros poliedros (os semi-regulares), além das aplicações da Razão Áurea à arquitetura. Na obra, as ilustrações dos sólidos foram feitas por Leonardo da Vinci, como afirma Bertato (2008, pg. XVII), quem traduziu parte da obra de Pacioli e nos traz uma citação do frade “(...) o pequeno livro intitulado Divina Proporção. E com tanto entusiasmo que nele incluí esquemas feitos pela mão de nosso Leonardo Da Vinci, para fazê-lo mais instrutivo à vista”. (Pacioli, 1509, p. A ii recto)

Figura 5: Poliedros regulares feitos por Leonardo Da Vinci



Fonte: BERTATO, 2008 pg. 111

Como já vimos, a divisão de um segmento em média e extrema razão foi denominada por Euclides de *razão média e extrema*. Porém, não se sabe ao certo a partir de que momento se passou a utilizar o termo *seção áurea* para designá-la. Autores como Carl B. Boyers dizem que esse nome tem origem por volta dos séculos XV e XVI, “(...) mais ou menos pela época em que Kepler escrevia liricamente (...)” (BOYER, 1996, pg. 35). Outros, como Mario Livio, acreditam que a origem do nome data do século XIX, por volta de 1830. Apesar de não saber quem a citou pela primeira vez, após várias análises, Livio (2006) diz que a expressão foi encontrada na segunda edição do livro de Martin Ohm (irmão Georg Simon Ohm, autor da Lei de Ohm), *Die Reine Elementar-Mathematik* (A Matemática Elementar Pura) de 1835. Ohm utilizou a seguinte expressão em uma nota de rodapé: “Essa divisão de uma linha arbitrária em duas partes também costuma ser chamada de seção áurea.” (LIVIO, 2006, pg. 17). Como essa expressão não aparece na primeira edição do livro (1826), acabou concedendo-se a Martin Ohm a origem de tal.

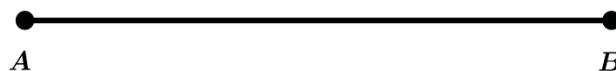
3.2 DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO

Proposição 3.1: Dividir um segmento em média e extrema razão.

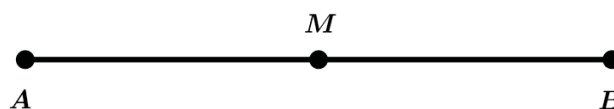
Para obter geometricamente o segmento áureo, usaremos apenas régua e compasso. Assim podemos partir de um segmento de reta com extremidades A e B e determinar um ponto C entre A e B , tal que C divide AB em média e extrema razão.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

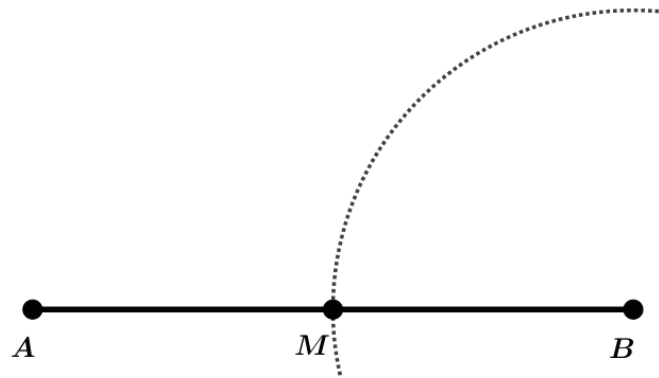
Seja o segmento de reta AB , conforme a construção abaixo, então:



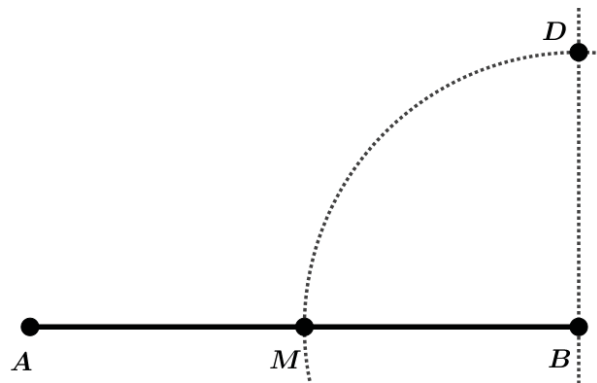
1º passo: marcar M , o ponto médio de AB ;



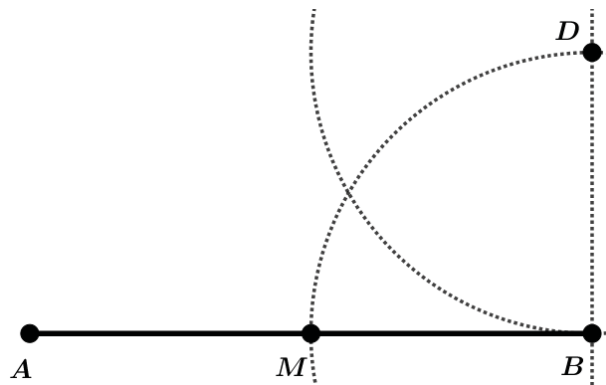
2º passo: construir uma circunferência com centro em B e raio BM ;



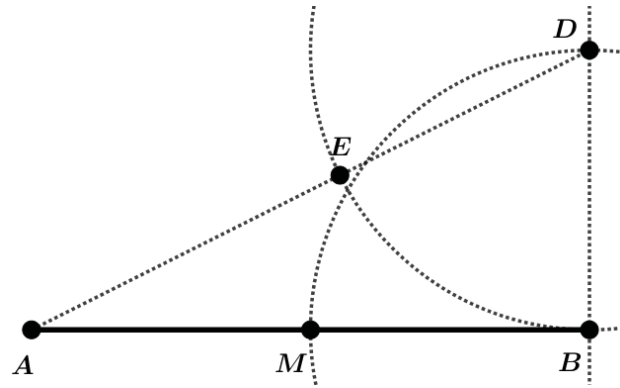
3º passo: pelo ponto B traçar uma perpendicular BD , onde D é a interseção da circunferência e a reta perpendicular;



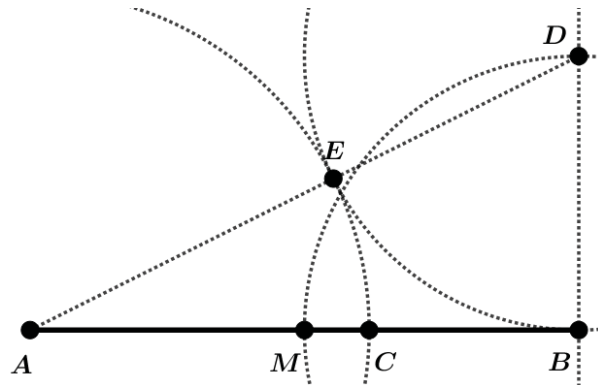
4º passo: traçar uma circunferência de centro D e raio DB ;



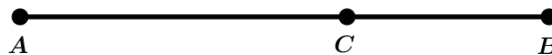
5º passo: construir o segmento que une o ponto A ao ponto D e marcar E , interseção do segmento AD com a circunferência de raio DB ;



6º passo: construir uma semicircunferência de raio AE e usar esse raio para marcar o ponto C no segmento AB .



Portanto, o ponto C divide o segmento AB em duas partes, então dizemos que AC é o seguimento áureo de AB .



$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Note que, como $AB = AC + CB$, podemos também caracterizar o segmento áureo por:

$$\frac{AC + CB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

ou ainda,

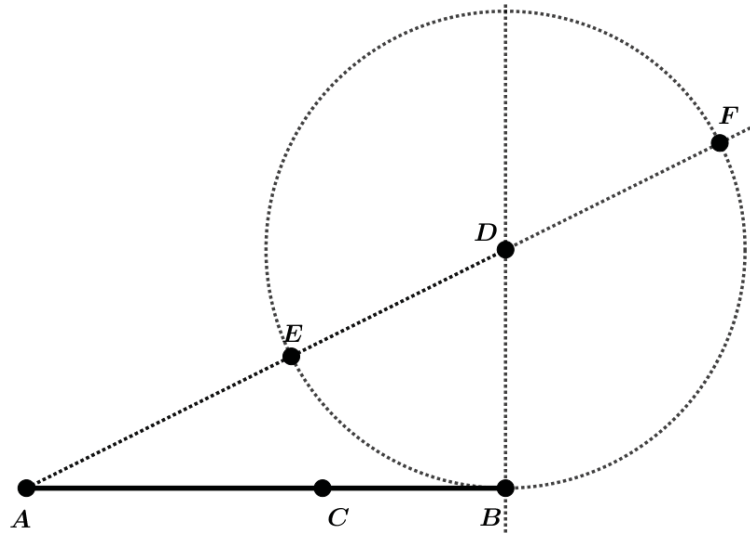
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AB - AC}$$

3.3 PROVA ALGÉBRICA DA DIVISÃO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO

Proposição 3.2: AC é o segmento áureo de AB .

Demonstração:

Prolongando o segmento AD até F , como na construção a seguir.



Note que $AC = AE$ e que $ED = DF = DB = \frac{1}{2} AB$, logo $EF = AB$.

Pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos que:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AB}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{AF - AB}{AB} = \frac{AB - AE}{AE}$$

Como $AF - AB = AE$, pois $EF = AB$. Então,

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB - AE}{AE}$$

ou

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AB - AE}$$

E, por fim, $AE = AC$ é o segmento áureo de AB .

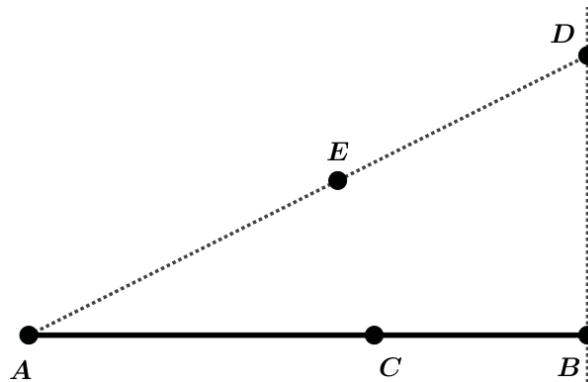
3.4 O NÚMERO ÁUREO

A literatura matemática mais antiga representava o número áureo pela letra grega *tal* τ (que significa “o corte” ou “a seção”). No início do século XX, o matemático americano Mark Barr começou a utilizar a letra grega *phi* Φ (lê-se fi) para representar tal número. A escolha dessa letra foi feita em homenagem ao arquiteto e escultor Phidias (responsável pelo templo grego Partenon).

Proposição 3.3: O valor numérico da divisão de um segmento em média e extrema razão é $\Phi = 1,61803\dots$

Demonstração:

Para essa prova, vamos considerar o triângulo retângulo $\triangle ADB$.



Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned}
 (AD)^2 &= (AB)^2 + (BD)^2 \\
 \Rightarrow \left(AC + \frac{AB}{2}\right)^2 &= (AB)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\
 \Rightarrow (AC)^2 + AC \cdot AB + \cancel{\frac{(AB)^2}{4}} &= (AB)^2 + \cancel{\frac{(AB)^2}{4}} \\
 \Rightarrow (AB)^2 - AC \cdot AB - (AC)^2 &= 0 \\
 \Rightarrow AB &= \frac{AC \pm \sqrt{(-AC)^2 - 4[-(AC)^2]}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{AC \pm \sqrt{5(AC)^2}}{2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{AC \pm AC\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow AB = AC \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como estamos em busca da medida de um segmento, então a solução positiva desta sentença é o número de ouro, representado por Φ :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948482045868343656... = \Phi$$

Já a solução negativa da sentença pode ser representada por Φ'

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,61803... = \Phi'$$

3.5 A INCOMENSURABILIDADE DO NÚMERO DE OURO

Durante muito tempo acreditou-se que dois segmentos quaisquer eram sempre comensuráveis, ou seja, a relação entre eles poderia ser medida por um número racional. E, como já vimos, a descoberta da incomensurabilidade da Razão Áurea (atribuída a Hipassos), ou seja, um número que não é inteiro e nem razão de dois inteiros, causou um grande mal-estar para a comunidade matemática da época, a ponto de os pitagóricos acreditarem que se tratava de um erro cósmico, um número tão horrível que deveria ser mantido em sigilo (Lívio, 2011). Sobre o assunto, o historiador e filósofo Jâmblico (245 a 325 d.C.), descreveu (apud, LIVIO, 2011, pg. 16):

Eles diziam que o primeiro [humano] a revelar a natureza da comensurabilidade e da incomensurabilidade para aqueles que não eram dignos de compartilhar a teoria era tão odiado que não só foi banido da associação e do modo de vida [pitagórico], como

também teve seu túmulo construído, como se o antigo colega tivesse sido apartado da vida entre o gênero humano.

Vamos então demonstrar que a descoberta da incomensurabilidade do número de ouro era também a descoberta da irracionalidade, ou vice-versa.

Proposição 3.4: O número Φ é irracional.

Demonstração:

Sabemos que todo número que pode ser escrito em forma de uma fração irredutível, ou seja,

$\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ e com o $\text{mdc}(a, b) = 1$, é racional. Vamos então supor que Φ é um número racional, logo podemos escrever:

$$\Phi = \frac{a}{b} \quad (\text{I})$$

Já conhecemos a equação de segundo grau cuja raiz positiva é o número de ouro, logo:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \quad (\text{II})$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 - ab}{b^2} = 1$$

$$a(a - b) = b^2$$

Como $(a - b) \in \mathbb{Z}$, então a divide b^2 e, conseqüentemente, a divide b . Portanto, a e b possuem um fator em comum, ou seja, o $\text{mdc}(a, b) \neq 1$. Mas isso é um absurdo, pois contraria nossa hipótese. Portanto, Φ é irracional.

3.6 CARACTERÍSTICAS DE Φ

Além de ser um número irracional, a razão áurea possui muitas propriedades e/ou características algébricas únicas e interessantes, uma delas está destacada em Lívio (2006, pg. 99),

[...] Enquanto o quadrado do número 1,6180339887... dá 2,6180339887..., seu inverso (“um sobre”) dá 0,6180339887..., todos tendo exatamente os mesmos dígitos depois da vírgula! A Razão Áurea tem as propriedades únicas de produzir seu quadrado simplesmente somando 1, e seu recíproco subtraindo 1.

É interessante e curioso verificar também as relações existentes entre as raízes Φ e Φ' .

Proposição 3.5: $\frac{1}{\Phi}$ é a proporção inversa de Φ

Demonstração:

Temos que:

$$\begin{aligned}\frac{AB}{AC} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \\ \Rightarrow \frac{AC}{AB} &= \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{5}+1} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} \right) \\ \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}-2}{4} \\ \therefore \frac{AC}{AB} &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803... = \frac{1}{\Phi}\end{aligned}$$

Proposição 3.6: Φ' é o recíproco negativo de Φ .

Demonstração:

Como

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

Multiplicando ambos os membros por (-1) ,

$$-\frac{1}{\Phi} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2-2\sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore -\frac{1}{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,61803... = \Phi'$$

Proposição 3.7: O produto de Φ por Φ' é igual a -1

Demonstração:

$$\Phi \cdot \Phi' = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1-5}{4} = -1$$

$$\therefore \Phi \cdot \Phi' = -1$$

Proposição 3.8: A soma de Φ por Φ' é igual a 1

Demonstração:

$$\Phi + \Phi' = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1+1}{2} = 1$$

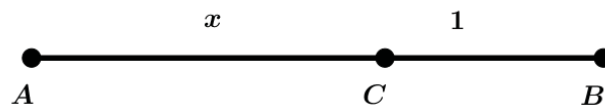
$$\therefore \Phi + \Phi' = 1$$

Proposição 3.9: O número Φ subtraído de 1 é igual à $-\Phi'$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\Phi - 1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 \\ \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{5} - 2}{2} \\ \therefore \frac{\sqrt{5} - 1}{2} &= -\Phi'\end{aligned}$$

Para as **Proposições 3.10 e 3.11** vamos considerar um segmento AB , dividido por C , em média e extrema razão. Seja $AC = x$, $CB = 1 \Rightarrow AB = x + 1$, como abaixo,



temos então que:

$$\begin{aligned}\frac{AB}{AC} &= \frac{AC}{CB} \\ \Rightarrow \frac{x+1}{x} &= \frac{x}{1} \\ \Rightarrow x^2 &= x+1 \\ \Rightarrow x^2 - x - 1 &= 0\end{aligned}$$

Já vimos que a raiz positiva desta equação define o valor numérico de Φ , logo:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

ou

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

Proposição 3.10: É válido que $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n-1}$

Demonstração:

Considerando a equação $\Phi^2 = \Phi + 1$ e multiplicando-a por Φ , temos:

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$$

Substituindo Φ^2 por $\Phi + 1$

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1 \Rightarrow \Phi^2 + \Phi$$

Repetindo o processo mais algumas vezes,

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2 \Rightarrow \Phi^3 + \Phi^2$$

$$\Phi^5 = 5\Phi + 3 \Rightarrow \Phi^4 + \Phi^3$$

$$\Phi^6 = 8\Phi + 5 \Rightarrow \Phi^5 + \Phi^4$$

É fácil perceber uma regularidade e podemos então generalizar:

$$\therefore \Phi^{n+1} = a_{n+1}\Phi + a_n \Rightarrow \Phi^{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n-1}$$

Em que a_n é o n-ésimo termo da sequência e a_{n+1} é o termo imediatamente posterior. Portanto, temos uma progressão geométrica em que cada termo é obtido a partir da soma dos dois anteriores. Tal propriedade é, ao mesmo tempo, geométrica e aditiva. Podemos escrever tal progressão como:

$$\{1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \dots, \Phi^n, \Phi^{n+1}\}$$

Em que o primeiro termo é 1 e a razão é Φ . Podemos também escrever a progressão como:

$$\{1, \Phi, \Phi + 1, 2\Phi + 1, 3\Phi + 2, \dots, a_n\Phi + a_{n-1}, a_{n+1}\Phi + a_n\}$$

Chamamos essa sequência de Progressão Geométrica Áurea (ela está intimamente ligada à sequência de Fibonacci, que será abordada no capítulo 6).

Proposição 3.11: É válido que $\frac{1}{\Phi^{n+1}} = \frac{1}{\Phi^{n+2}} + \frac{1}{\Phi^{n+3}}$

Demonstração:

Considerando a equação $\Phi^2 = \Phi + 1$ e dividindo-a por Φ , temos:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

Repetindo esse processo,

$$1 = \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2}$$

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3}$$

Podemos então generalizar:

$$\therefore \frac{1}{\Phi^{n+1}} = \frac{1}{\Phi^{n+2}} + \frac{1}{\Phi^{n+3}}$$

Assim, cada termo da progressão é obtido pela soma dos dois posteriores.

4 FIGURAS GEOMÉTRICAS ÁUREAS

A razão áurea vem, há muito tempo, encantando diversos matemáticos e artistas por sua harmonia e beleza. É considerada uma das mais intrigantes constantes matemáticas, a mais agradável proporção entre duas medidas. E foi exaltada por Kepler,

A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar joia preciosa. (apud BOYER, 1996, p. 35).

Pode ser aplicada ou encontrada em diversas situações como, por exemplo, nas artes (como em a "Sagrada Família", de Michelângelo; também em diversas obras de Leonardo da Vinci, como "Mona Lisa"), na arquitetura (a fachada do Templo de Pártenon, na Grécia; também na pirâmide de Gizeh, no Egito; na catedral de Notre Dames de Chartres, na França), na ciência (nos padrões de beleza do corpo humano, no crescimento das plantas, na disposição das sementes do girassol, na frequência das vibrações de átomos magnéticos), na música (nas Sinfonias, n.º 5 e n.º 9, de Beethoven), em formas variadas.

Figura 6: Obra Sagrada Família de Michelângelo e Mona Lisa de Leonardo Da Vince



Fonte: <https://www.historiadasartes.com/sala-dos-professores/tondo-doni-michelangelo/>. Acesso em: 09/03/19

Figura 7: Catedral de Notre Dame de Girassol



Fonte: <https://francetravelplanner.com/go/chartres/see/cathedral.html>. Acesso em: 09/03/19

Fonte: <https://gizmodo.uol.com.br/mitos-proporcao-aurea/>. Acesso em: 08/03/19

Essa razão, de acordo com alguns autores da literatura matemática, é sinônimo de beleza e harmonia, uma vez que, proporciona uma estética mais agradável. Assim, as figuras geométricas construídas a partir de tal razão também são esteticamente mais agradáveis aos olhos humanos, sendo assim chamadas de figuras geométricas áureas ou figuras perfeitas.

São consideradas figuras geométricas áureas o triângulo áureo, o retângulo áureo e o pentágono regular estrelado (ou pentagrama). Essas figuras, possuem uma propriedade particular que é a autopropagação, ou seja, podem ser divididas infinitamente que, ainda assim, vão formar figuras semelhantes (com as mesmas características e propriedades) a original. E ainda, no caso do triângulo e do retângulo áureo, isso permite a construção da espiral áurea.

Vamos agora estudar essas figuras consideradas esteticamente agradáveis, suas construções e propriedades geométricas.

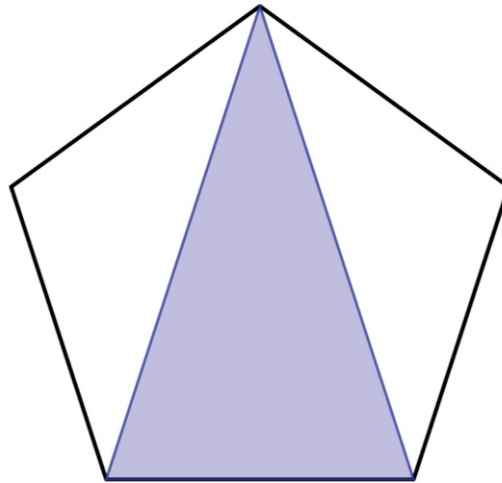
4.1 TRIÂNGULO ÁUREO

O Triângulo Áureo é um triângulo isósceles em que os ângulos da base são iguais a 72° e, obviamente, o ângulo superior é de 36° . Além disso, a razão entre a medida do lado maior e a medida do lado menor equivale à razão áurea. E também, se ao traçarmos a bissetriz de um dos ângulos da base e o prolongarmos até o lado oposto a esse ângulo, o novo triângulo obtido também é isósceles e semelhante ao original. Esse processo pode ser repetido indefinidamente e os triângulos manterão as mesmas características dos anteriores.

4.1.1 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DO TRIÂNGULO DOURADO

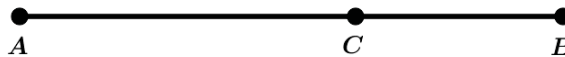
Para essa construção, vamos considerar um triângulo isósceles $\triangle ABC$, em que os ângulos da base valem o dobro do terceiro ângulo, ou seja, possui ângulos de 36° , 72° e 72° . Tal triângulo é obtido de diversas maneiras no pentágono, de modo que a base do triângulo é um dos lados do pentágono e o terceiro vértice do triângulo é um dos vértices do pentágono oposto a base, como mostra a Figura 8 a seguir:

Figura 8: Triângulo isósceles inscrito no pentágono

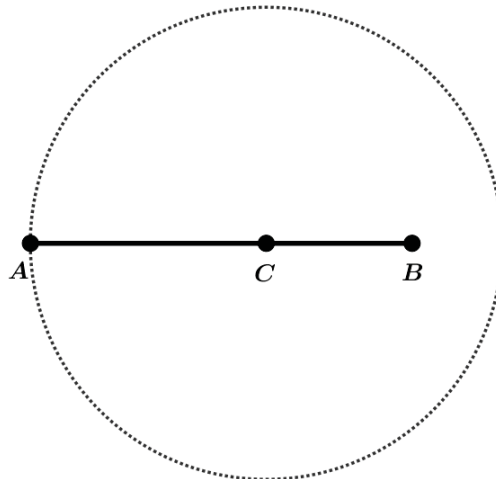


Fonte: Elaborado pelo autor

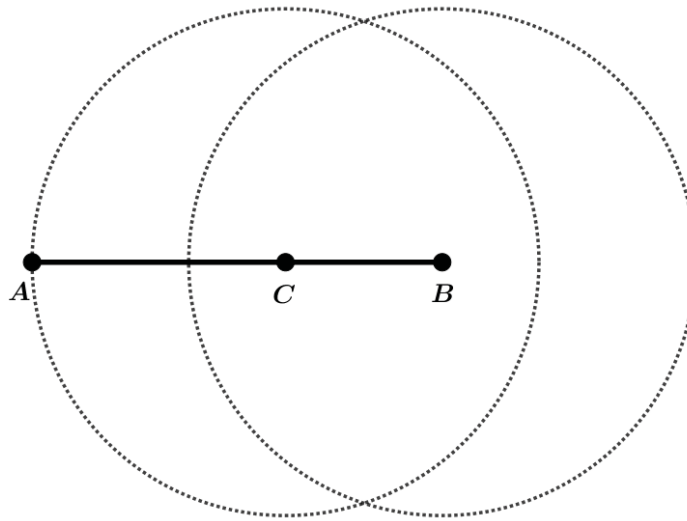
1º passo: Construir um segmento AB e determinar um ponto C , tal que AC seja segmento áureo de AB ;



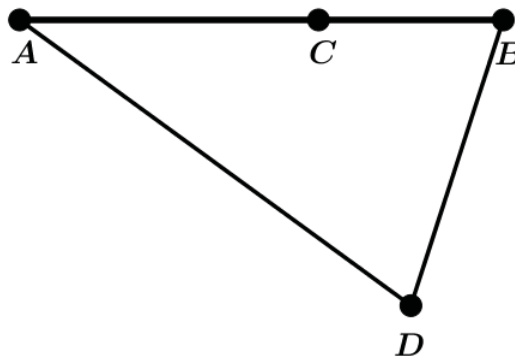
2º passo: Determinar uma circunferência com centro em C e raio CA ;



3º passo: Construir uma nova circunferência, agora com centro em B e raio CA ;



4º passo: Marcar uma das interseções das circunferências e nomeá-la D .



Portanto, o triângulo $\triangle ABD$ é um triângulo áureo de base BD , os ângulos da base têm medida 72° e o ângulo oposto à base tem 36° .

4.1.2 JUSTIFICATIVA DA CONSTRUÇÃO

Proposição 4.1: O triângulo $\triangle ABD$ é um Triângulo Áureo.

Demonstração:

Para verificarmos a veracidade da construção será necessário provar alguns pontos. Vamos, inicialmente, verificar que o triângulo $\triangle ABD$ é isósceles, depois provar que CD é bissetriz do ângulo $\angle BDA$ e, por fim, provar que $\angle DAB = 36^\circ$.

(I) O triângulo $\triangle ABD$ é isósceles:

Por construção, sabemos que AC é segmento áureo de AB , logo,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Como o ponto D é interseção das duas circunferências de raio CA , então $AC = BD$,

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{CB}$$

Segue que,

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{CB} = \frac{AC}{CB}$$

Como, por construção, sabemos que $CD = BD$, então o triângulo $\triangle CBD$ é isósceles. Já sabemos que AC é segmento áureo^(*) de AB e também que $\angle CBD = \angle ABD$, como o triângulo $\triangle CBD$ é isósceles, então $\angle CBD = \angle DCB$, como consequência de (*) temos que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CB}$$

Assim, por LAL, $\triangle ABD \sim \triangle CBD$, logo o $\triangle ABD$ também é isósceles.

(II) CD é bissetriz de $\angle BDA$

Note que

$$\angle ADB = \angle ADC + \angle CDB$$

Vimos que $\triangle CBD \sim \triangle ABD$, logo

$$\angle DAC = \angle CDA = \angle BDC$$

Portanto CD divide $\angle BDA$ em duas partes iguais.

(III) $\angle DAB = 36^\circ$

Considerando o $\angle DAB = x$, vimos que

$$\angle BDC \cong \angle DAB \text{ e } \angle BDC \cong \angle CDA.$$

Do teorema do Ângulo Externo (aplicado ao triângulo $\triangle ACD$), sabemos que

$$\angle DCB = \angle DAC + \angle CDA$$

Mas

$$\angle DAC = \angle CDA = \angle DAB \text{ e } \angle DCB = \angle ABD$$

$$\Rightarrow \angle DCB = 2 \cdot \angle DAB \text{ ou } \angle ABD = 2 \cdot x.$$

Como $\triangle ABD$ é isósceles,

$$\angle ABD = \angle BDA = 2 \cdot x$$

Então a soma dos ângulos internos é:

$$\angle DAB + \angle ABD + \angle BDC + \angle CDA = x + 2 \cdot x + 2 \cdot x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 5 \cdot x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 36^\circ = \angle DAB$$

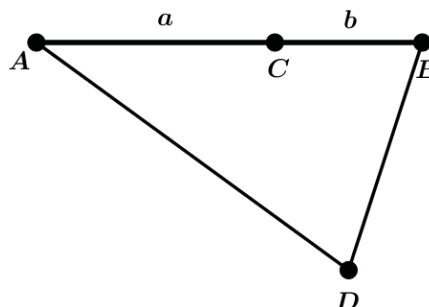
Portanto, se $\triangle ABD$ é isósceles e $\angle DAC = 36^\circ$, então os ângulos da base são iguais e só podem ter medida igual a 72° cada.

4.1.3 JUSTIFICATIVA ALGÉBRICA

Proposição 4.2: A razão entre o lado maior e o lado menor do triângulo é igual a Φ .

Demonstração:

Vamos agora verificar, algebricamente, que o triângulo $\triangle ABD$ é áureo. Para isso, consideraremos $AB = a + b$ e $BD = a$.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow ab + b^2 = a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$$

Resolvendo a equação de 2º grau na incógnita $a > 0$,

$$a = b \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618... = \Phi$$

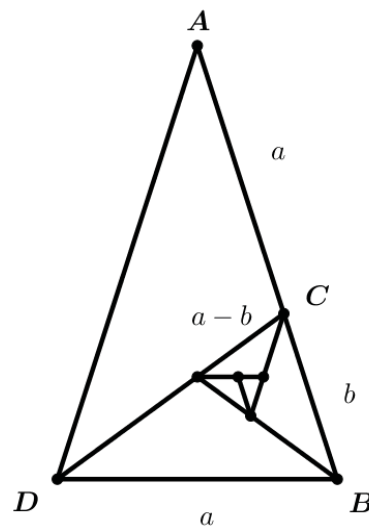
4.1.4 A AUTOPROPAGAÇÃO DO TRIÂNGULO ÁUREO

Proposição 4.3: O Triângulo Dourado é autopropagável.

Demonstração:

Seja o triângulo áureo de lados a , $a+b$ e $a+b$

Figura 9: Autopropagação do Triângulo de Ouro



Fonte: Elaborado pelo autor

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

das propriedades das proporções,

$$\frac{a+b}{a} - 1 = \frac{a}{b} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$$

ou

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Isso evidencia que, como o triângulo isósceles de lados a e $a+b$ é áureo, então o triângulo de lados b e a também é áureo e mantêm as mesmas propriedades e características do primeiro. Tal processo pode-se repetir infinitamente e os triângulos de lados $a-b$ e a , $2b-a$ e $a-b$, $2a-3b$ e $2b-a$,..., construídos diante desse processo, preservam todas as características e propriedades do original.

4.2 RETÂNGULO DE OURO

Os gregos antigos consideravam que, dentre todos os retângulos, aquele que possui uma determinada proporção entre a largura, o comprimento e a diferença entre eles era o mais agradável esteticamente aos olhos. Tal proporção é a áurea e, por consequência, o retângulo ficou conhecido como Retângulo Áureo. Assim, utilizaram-no com frequência em sua arquitetura, por exemplo, “As proporções do conhecido Partenon prestam testemunho da influência que o retângulo áureo exerceu sobre a arquitetura grega” (HUNTLEY, 1985, pg. 68). Na arte, acredita-se que a proporção tenha influenciado as obras de diversos artistas, principalmente os renascentistas, dentre eles Da Vinci em Mona Lisa.

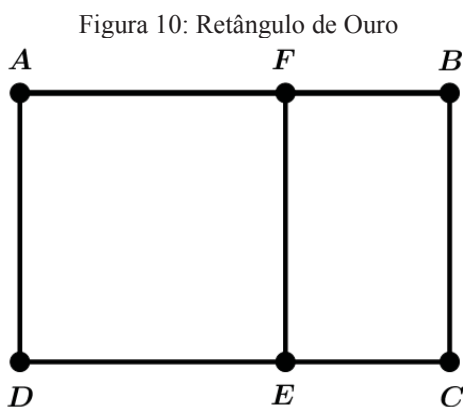
O Retângulo Áureo, ainda hoje, é considerado mais harmonioso, mais agradável esteticamente, prova disso são as dimensões da maioria das revistas, dos *outdoors*, dos cartões de crédito, cartão de visita, das fotografias, entre outras, que se aproximam da Razão Áurea.

Em 1876, o psicólogo alemão, Gustav Fechner, realizou uma pesquisa sobre a preferência por formato de retângulos. O resultado desta pesquisa mostrou que a maioria das pessoas prefere um certo retângulo cuja razão entre as suas medidas muito se aproxima da razão áurea. Essas pesquisas foram repetidas por Wilmar (1894), Lalo

(1908) e Thorndike (1917) e em cada uma destas pesquisas os resultados foram semelhantes. (QUEIROZ, 2007, p.7).

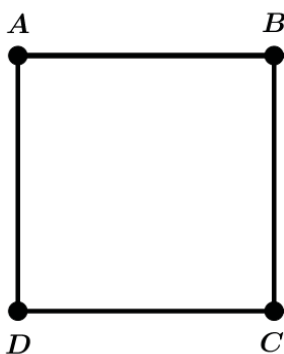
O Retângulo Áureo é uma figura muito interessante, pois possui, dentre outras, a propriedade da divisão sucessiva em figuras semelhantes, ou seja, é possível extrair dele um quadrado, obtendo novos retângulos, os quais preservam as mesmas propriedades do original, num processo infinito.

Podemos definir como retângulo áureo todo retângulo $ABCD$ (Figura 10), de modo que ao subtrairmos um quadrado $AFED$, o retângulo restante $FBCE$, será semelhante ao retângulo original.

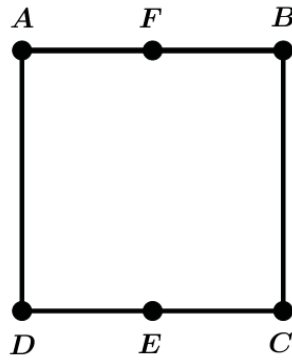


4.2.1 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DO RETÂNGULO ÁUREO

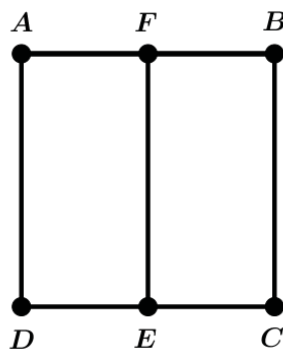
1º passo: Construir um quadrado $ABCD$ qualquer;



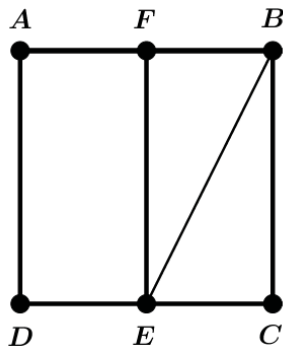
2º passo: Marcar E e F , ponto médio das bases inferior e superior, respectivamente;



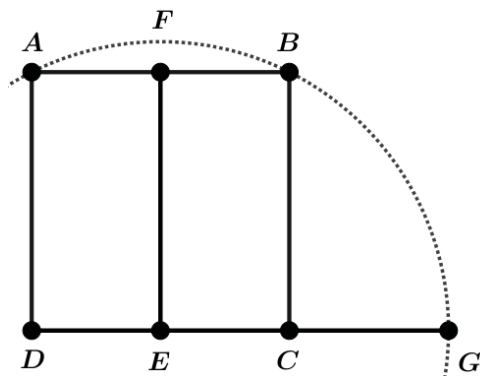
3º passo: Unir os pontos médios E e F ;



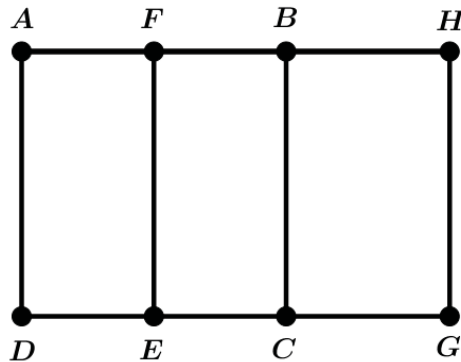
4º passo: Traçar a diagonal BE do retângulo $FBCE$;



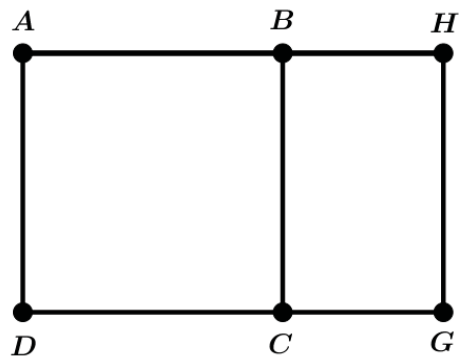
5º passo: Usando a diagonal BE como raio, traçar um arco que intercepta o prolongamento de DC em G ;



6º passo: Erguer uma perpendicular a DC passando por G , que interceptará o prolongamento de AB em H ;



Assim, o novo retângulo $AHGD$ é um retângulo áureo.

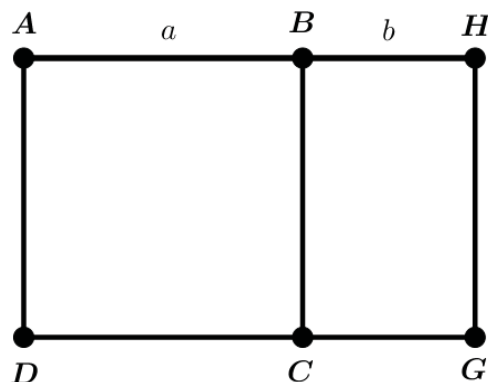


4.2.2 JUSTIFICATIVA DA CONSTRUÇÃO

Proposição 4.4: A razão entre o lado maior e o lado menor do retângulo é igual a Φ .

Demonstração:

Vamos verificar, algebricamente, que o retângulo $AHGD$ é áureo. Para isso, consideraremos $AB = a$ e $BH = b$, logo, $AH = a + b$:



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow ab + b^2 = a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$$

Resolvendo a equação de 2º grau na incógnita $a > 0$,

$$a = b \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

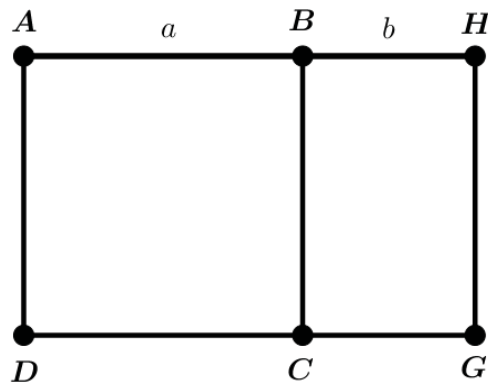
$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618... = \Phi$$

4.2.3 A AUTOPROPAGAÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO

Proposição 4.5: O Retângulo de Ouro é autopropagável.

Demonstração:

Seja o retângulo áureo de lados $a+b$ e a



Então,

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

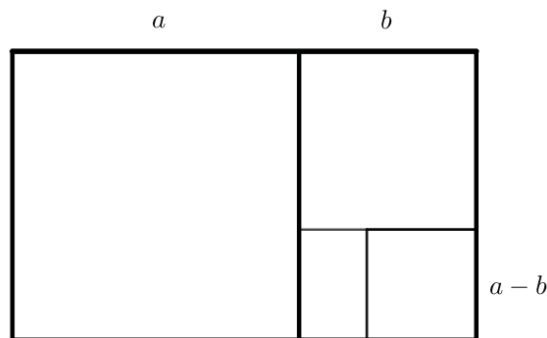
Das propriedades das proporções,

$$\frac{a+b}{a} - 1 = \frac{a}{b} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$$

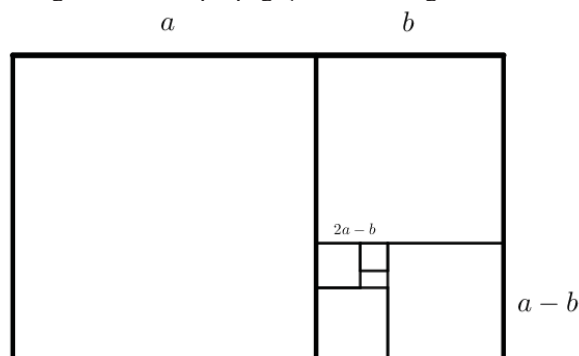
ou

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$



Portanto, como o retângulo de lados a e $a+b$ é áureo, então o retângulo de lados a e b também é áureo. Esse novo retângulo mantém as mesmas propriedades do original e tal situação se repete infinitamente. Podemos aplicar esse mesmo raciocínio ao retângulo de lados b e $a-b$, $a-b$ e $2b-a$, $2b-a$ e $2a-3b$ “Dado, então, um retângulo áureo qualquer, existem infinitos retângulos áureos maiores e menores do que ele e dele derivados”. (GARBI, 2010, pg. 136)

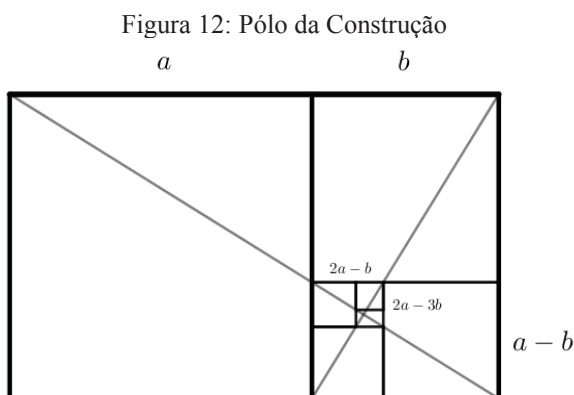
Figura 11: Autopropagação do Retângulo Áureo



Fonte: Elaborado pelo autor

E assim, os retângulos áureos também vão convergindo para um ponto, o qual é conhecido, na literatura matemática, como *pólo da construção* ou *olho de Deus*. No retângulo,

esse *pólo* é obtido por meio do encontro das diagonais de todos os retângulos, como mostra a Figura 12.

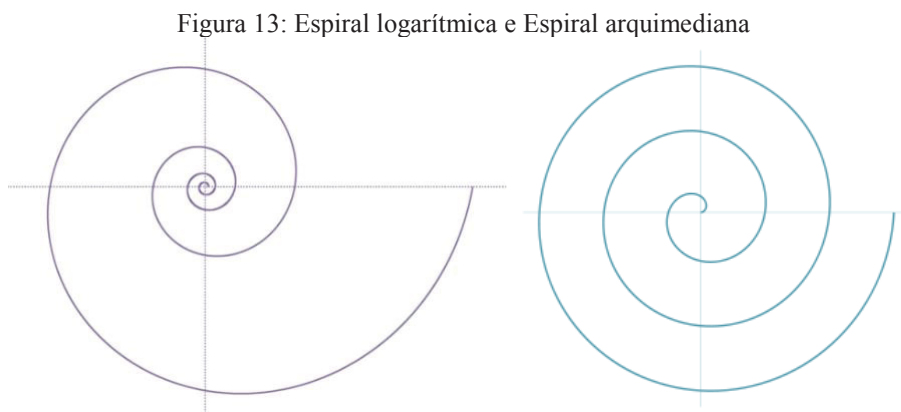


Fonte: Elaborado pelo autor

E, como veremos adiante, a curva que leva a esse *pólo* se aproxima de uma espiral logarítmica ou digital de Deus ou ainda, como chamava Descartes, *espiral equiangular*, ou seja, se desenharmos uma reta do *pólo* até qualquer ponto da curva, ela cortará a curva formando o mesmo ângulo.

4.3 ESPIRAL LOGARÍTMICA OU ESPIRAL ÁUREA

Spira Mirabilis (espiral maravilhosa) foi a definição dada por Jacques Bernoulli (1654-1705) a uma das curvas mais famosas e encantadoras da Matemática. Bernoulli foi um dos matemáticos, talvez o primeiro, que se dedicou exaustivamente ao estudo das propriedades dessa curva, e ficou tão encantado que mandou gravar em seu túmulo *Eadem mutato resurgo* (embora mudado, ressurjo o mesmo) e a espiral (lamentavelmente, o escultor se confundiu e acabou gravando a espiral arquimediana).



Fonte: Elaborado pelo autor

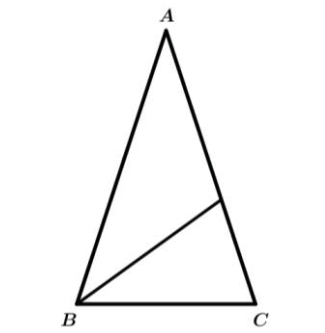
Podemos então definir uma espiral logarítmica como sendo o lugar geométrico no plano formado pelo deslocamento de um ponto que se move uniformemente ao longo de um raio, partindo do centro, enquanto o raio por sua vez, gira uniformemente em torno de uma origem (CONTADOR, 2011). A principal característica dessa curva é que, mesmo que seu tamanho cresça, ela não altera o formato, tal propriedade é conhecida como autossimilaridade.

Mas o que essa espiral tem a ver com a razão áurea? Para responder a essa pergunta, vamos retornar ao Triângulo e ao Retângulo Áureos. Vimos que essas duas formas têm como característica a autopropagação e vão convergindo para um determinado ponto, o *pólo da construção*. Ligando os vértices por meio de uma curva, obteremos, tanto no retângulo quanto no triângulo, uma espiral muito semelhante a espiral logarítmica.

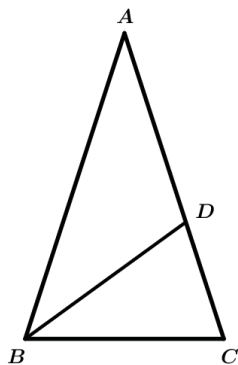
4.3.1 CONSTRUÇÃO DA ESPIRAL NO TRIÂNGULO ÁUREO

Para a construção da espiral no Triângulo Áureo, vamos considerar um triângulo isósceles $\triangle ABC$ em que os ângulos da base possuem 72° e o terceiro ângulo possui 36° .

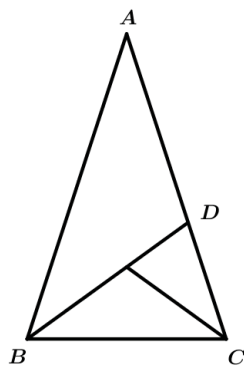
1º passo: Traçar a bissetriz de um dos ângulos da base, ângulo B , por exemplo;



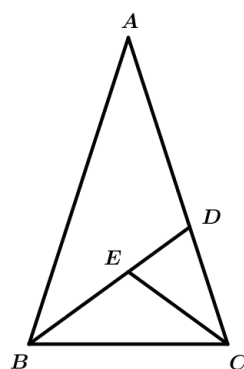
2º passo: Marcar o ponto D , de modo que este seja a interseção da bissetriz com o lado AC , formando o triângulo $\triangle BCD$ que é isósceles e semelhante ao original;



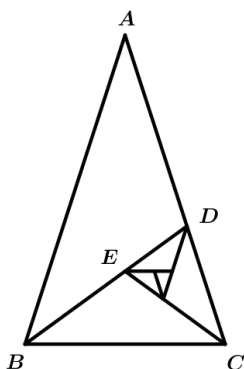
3º passo: Traçar a bissetriz do ângulo C ;



4º passo: Marcar o ponto E , de modo que este seja a interseção da bissetriz com o lado BD , formando o triângulo CDE que também é isósceles e semelhante ao original;

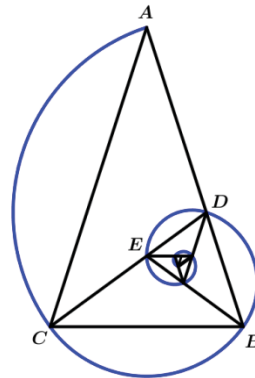


5º passo: Continuar a traçar a bissetriz de modo análogo aos processos anteriores.



6º passo: Ligar os vértices do triângulo progressivamente, como na Figura 14.

Figura 14: Espiral Áurea no Triângulo de Ouro



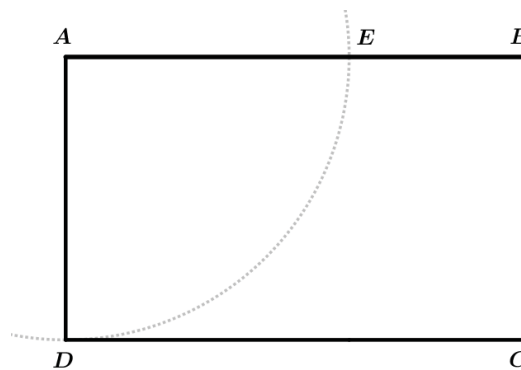
Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, a espiral que passa por todos os vértices (A, B, C, D, E, \dots) dos triângulos, é uma espiral muito próxima da logarítmica.

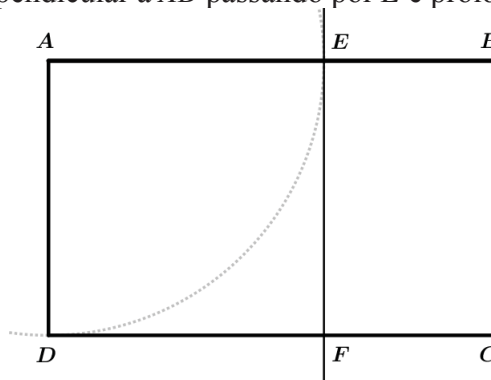
4.3.2 CONSTRUÇÃO DA ESPIRAL NO RETÂNGULO ÁUREO

Para a construção da espiral no retângulo, vamos considerar o retângulo áureo $ABCD$, como o da Figura 10.

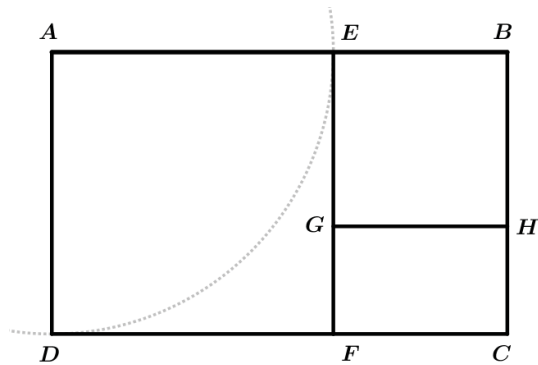
1º passo: Com centro em A , traçar um arco de raio AD até interceptar AB , em E ;



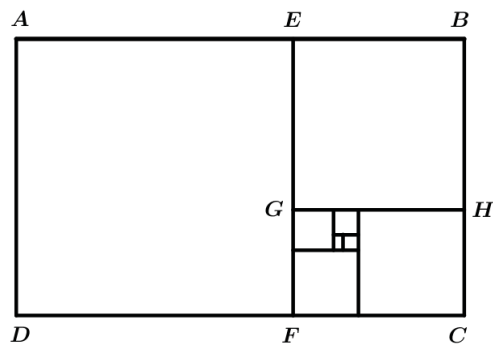
2º passo: Traçar uma perpendicular a AB passando por E e prolongar até interceptar DC em F ;



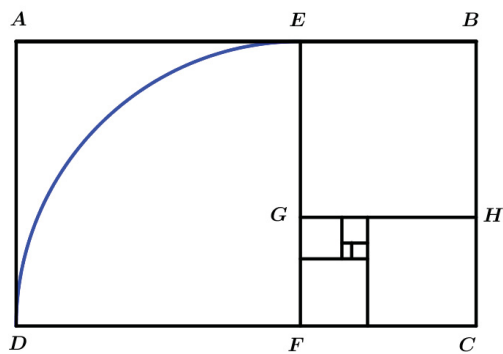
3º passo: Sacar o quadrado $AEFD$ e repetir os processos anteriores para o retângulo $EBCF$;



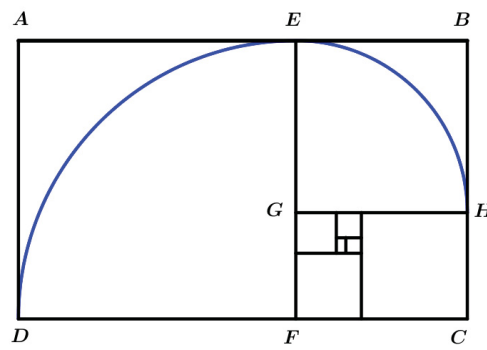
4º passo: Continuar a sacar quadrados dos retângulos áureos e repetir os processos dos passos 1 e 2;



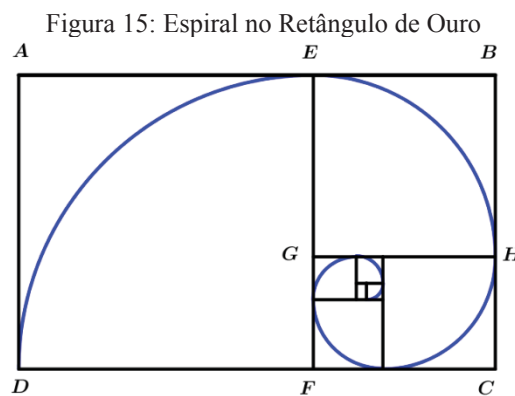
5º passo: Com centro em F traçar o arco DE .



6º passo: Com centro em G traçar o arco EH .



7º passo: Analogamente as etapas 5 e 6, continuar o traçado da espiral.



Fonte: Elaborado pelo autor

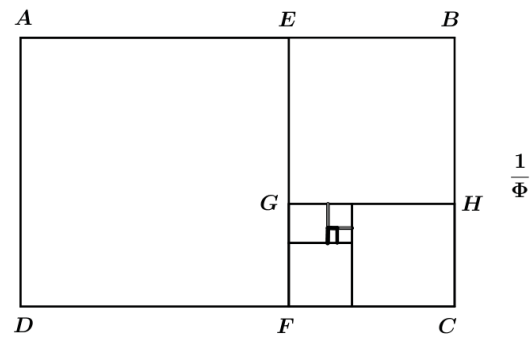
Portanto, a espiral será construída pelos arcos formados na ligação dos vértices não consecutivos. Assim, a divisão do retângulo original em diversos outros Retângulos Áureos permitiu a formação de uma sequência de quadrados que determinou o padrão da espiral.

4.4 ESPIRAL RETÂNGULAR

Outra espiral interessante é a espiral retangular, em que os ângulos entre os segmentos consecutivos são retos, ou seja, de 90° . E que, assim como a Espiral Áurea, é obtida através da autopropagação do Retângulo Áureo e construída através dos quadrados obtidos dentro dos retângulos.

Para verificarmos, vamos, inicialmente, considerar um Retângulo Áureo cujo lado maior, segmento AB , por exemplo, é unitário, ou seja, $AB = \Phi^0 = 1$. E o seu lado menor, segmento BC , por exemplo, tem medida igual a $BC = \Phi^{-1} = \frac{1}{\Phi}$.

Figura 16: Retângulo Áureo autopropagado
1



Fonte: Elaborado pelo autor

E, dando sequência na propagação, devemos ter:

$$\frac{\frac{1}{\Phi}}{FC} = \frac{FC + \frac{1}{\Phi}}{\frac{1}{\Phi}}$$

$$\Rightarrow FC^2 + FC \cdot \frac{1}{\Phi} = \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2$$

$$\Rightarrow \Phi \cdot FC^2 + FC - \frac{1}{\Phi} = 0$$

As raízes dessa equação são:

$$FC = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2\Phi} \quad \text{ou} \quad FC = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\Phi}$$

Já sabemos que $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$. Logo, utilizando apenas a raiz positiva, temos que:

$$FC = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2} = \Phi^{-2}$$

Esse processo pode ser repetido infinitas vezes para a obtenção dos lados subsequentes. Assim, seguindo a sequência, os segmentos vão diminuindo cada vez mais ($FG = \Phi^{-3}$; $GI = \Phi^{-4}$; $IJ = \Phi^{-5}$; ...) e convergindo para o ponto P , que nada mais é do que o *pólo da construção*.

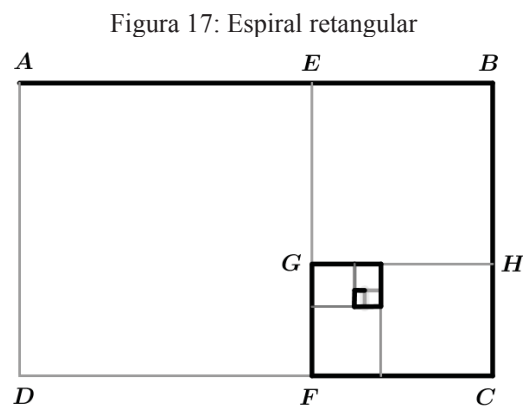
4.4.1 COMPRIMENTO DA ESPIRAL RETÂNGULAR

Proposição 4.6: O comprimento da espiral retangular é dado por:

$$C = \Phi^0 + \Phi^{-1} + \Phi^{-2} + \Phi^{-3} + \Phi^{-4} + \dots + \Phi^n + \dots = \Phi$$

Demonstração:

Seja C o comprimento da espiral, é fácil verificar, pela Figura 17, que o seu comprimento é dado por:



Fonte: Elaborado pelo autor

$$C = AB + BC + CF + FG + \dots$$

ou

$$C = \Phi^0 + \Phi^{-1} + \Phi^{-2} + \Phi^{-3} + \Phi^{-4} + \dots + \Phi^n + \dots$$

$$\Rightarrow C = 1 + \Phi^{-1} + \Phi^{-2} + \Phi^{-3} + \Phi^{-4} + \dots + \Phi^n + \dots$$

Note que, a soma acima é uma progressão geométrica em que o 1º termo é $a_1 = \Phi^{-1}$ e a razão é $q = \Phi^{-1}$. Assim, o comprimento da espiral será a soma dos n primeiros termos da sequência, dado por:

$$C = S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

$$S_n = \frac{\Phi^{-1} \cdot (1 - (\Phi^{-1})^n)}{1 - \Phi^{-1}}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{\Phi} - \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{\Phi^n}}{1 - \frac{1}{\Phi}}$$

$$C = S_n = \frac{1}{\Phi} \cdot \Phi^2$$

$$C = S_n = \Phi$$

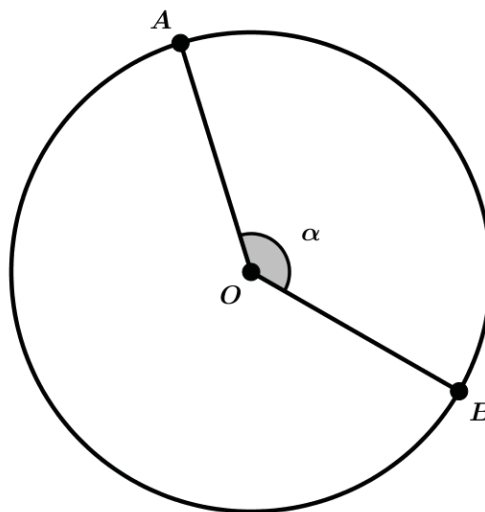
Portanto, o comprimento da espiral que vai de A a P é igual a:

$$C = \Phi^0 + \Phi^{-1} + \Phi^{-2} + \Phi^{-3} + \Phi^{-4} + \dots + \Phi^n + \dots = \Phi$$

4.5 ÂNGULO DE OURO

Seja um círculo de centro O , se o dividirmos em dois arcos de modo que a razão entre o comprimento do arco maior e o comprimento do arco menor seja igual ao número 1,618...(Phi), então chamaremos o menor ângulo de *ângulo áureo* ou *ângulo de ouro* ou *ângulo ideal*. Assim, efetuando essa divisão, obedecendo à proporção áurea, os ângulos que serão obtidos são $113,5^\circ$ e $222,5^\circ$.

Figura 18: Círculo



Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com Devlin (2005), esse ângulo foi descoberto por Church e confirmado por Weisner em 1875, e, em 1993, Doaudy e Couder realizaram estudos demonstrando sua grande relevância, principalmente nos estudos da Filotaxia, um ramo da botânica que estuda e classifica as diversas formas de disposição e organização das folhas em uma planta.

4.5.1 JUSTIFICATIVA ALGÉBRICA

Vamos considerar um círculo de centro O , raio r e comprimento a , dividido em dois arcos, arco ACB (arco maior) e arco ADB (arco menor), e também α como a medida do ângulo do arco ADB .

Sabemos que o comprimento de um círculo é dado por:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Como assumimos que o comprimento é igual a a , então

$$a = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Vamos agora, considerar que o comprimento do arco menor (ADB) é igual a b . Sabemos que a relação entre um ângulo e o comprimento de um arco é dada pela relação:

$$\text{ângulo} = \frac{\text{lado}}{\text{raio}}$$

Ou seja,

$$\alpha = \frac{b}{r}$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot r = b$$

Sabemos também, da proporção áurea, que vale relação,

$$\frac{a}{a-b} = \frac{a-b}{b}$$

Logo,

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{(2 \cdot \pi \cdot r) - (\alpha \cdot r)} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot r) - (\alpha \cdot r)}{\alpha \cdot r}$$

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r \cdot (2 \cdot \pi - \alpha)} = \frac{r \cdot (2 \cdot \pi - \alpha)}{\alpha \cdot r}$$

$$\frac{2 \cdot \pi}{(2 \cdot \pi - \alpha)} = \frac{(2 \cdot \pi - \alpha)}{\alpha}$$

Desenvolvendo a proporção, temos,

$$4 \cdot \pi^2 - 6 \cdot \pi \cdot \alpha + \alpha^2 = 0$$

Observe que a equação obtida é uma equação de segundo grau. Resolvendo-a na variável α , chegamos que,

$$\alpha = \frac{6 \cdot \pi \pm 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha_1 = \pi(3 - \sqrt{5})$$

$$\alpha_2 = \pi(3 + \sqrt{5})$$

Considerando que π equivale a 180° , logo,

$$\alpha_1 = 180^\circ \cdot (3 - \sqrt{5}) \cong 137,5^\circ$$

$$\alpha_2 = 180^\circ \cdot (3 + \sqrt{5}) \cong 942,5^\circ \cong 222,5^\circ$$

Se fizermos a razão entre esses dois ângulos obtemos que:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{222,5^\circ}{137,5^\circ} = 1,618...^\circ$$

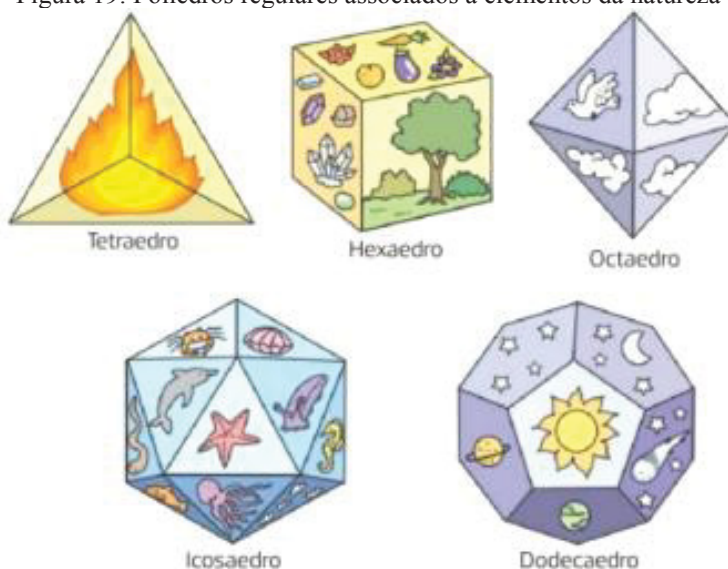
Assim, encontramos que a razão entre α_1 e α_2 equivale a um número muito próximo de Φ .

5 PENTÁGONO REGULAR

5.1 O PENTÁGONO: HISTÓRIA E CONSTRUÇÃO

Figuras que apresentam um certo tipo de regularidade sempre despertaram o interesse dos matemáticos ao longo dos tempos. Exemplo disso são os cinco sólidos regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, que foram associados ao filósofo grego Platão (427 a.C. 347 a.C.) por seus estudos para relacioná-los a elementos da natureza (terra, fogo, ar, universo e água, respectivamente), a partir dos quais acreditava-se que o mundo havia sido feito.

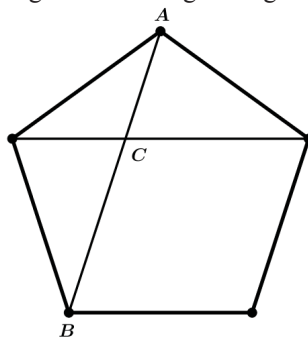
Figura 19: Poliedros regulares associados a elementos da natureza



Fonte: DANTE, 2014, p.88

Tais sólidos já eram conhecidos por Pitágoras e pelos membros da antiga sociedade pitagórica (por volta do século V a.C.). Talvez, dentre esses sólidos, o que mais os encantou foi o dodecaedro, por suas faces pentagonais regulares, onde acredita-se que a razão áurea tenha sido descoberta, na interseção de duas das suas diagonais, como mostra a Figura 20.

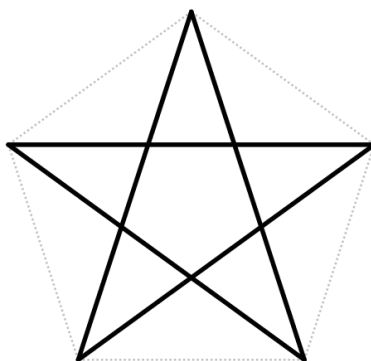
Figura 20: Pentágono regular



Fonte: Elaborado pelo autor

A partir do pentágono regular, traçando todas as suas diagonais ou prolongando os lados do pentágono até que, dois a dois, se intersectem, obtêm-se a estrela de cinco pontas ou pentagrama (Figura 21). O pentagrama é um dos símbolos mais antigos da matemática, e era utilizado pelos pitagóricos como símbolo da seita e para identificar seus membros.

Figura 21: Pentagrama

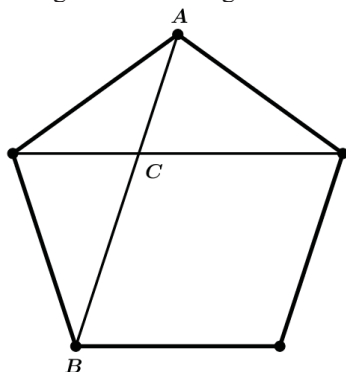


Fonte: Elaborado pelo autor

O pentagrama era também considerado, pelos membros da antiga sociedade de Pitágoras, um símbolo de boa saúde. Os cinco ângulos eram provavelmente designados pelas letras $\Upsilon \Theta \Gamma \Theta \Lambda$, que formam a palavra saúde em grego (Θ correspondendo ao ditongo EI). (HUNTLEY, 1985 pg. 41)

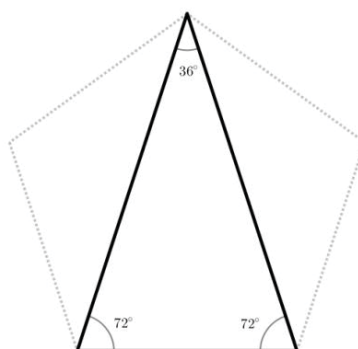
É muito compreensível o fascínio dos pitagóricos para com o pentágono regular, pois é a figura geométrica em que mais se obtém a razão áurea, seja na relação entre a interseção de duas de suas diagonais (Figura 22), na relação entre uma diagonal e um dos lados do pentágono, no triângulo isósceles áureo obtido por duas diagonais e um dos lados (Figura 23), ou na relação entre as medidas do raio da circunferência que circunscreve o decágono regular e um de seus lados (Figura 24), entre outras.

Figura 22: Encontro das diagonais do Pentagrama



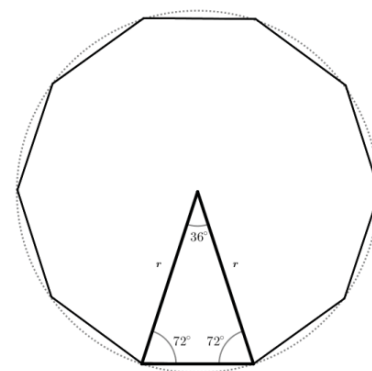
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 23: Triângulo isósceles áureo inscrito no Pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 24: Dodecaedro regular

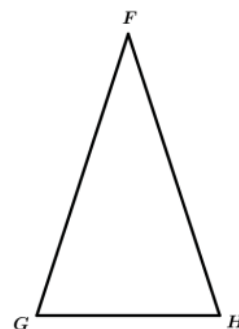
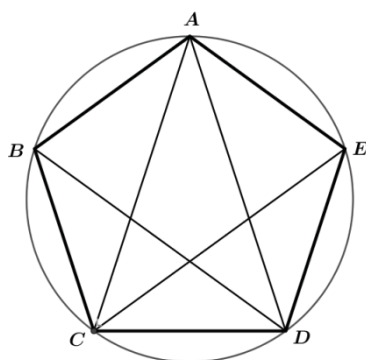


Fonte: Elaborado pelo autor

Além disso, alguns historiadores atribuem aos pitagóricos, em particular a Hipaso de Metaponto, a descoberta da incomensurabilidade, a qual pode ter acontecido justamente nos estudos da razão áurea.

Os sólidos regulares também foram estudados por Euclides, no livro XIII de *Elementos*, em que propõe a construção do dodecaedro e do icosaedro. Mas antes, nos livros precedentes, Euclides define a razão áurea (nos livros II e VI) e a utiliza para construir o pentágono regular (no livro IV). E foi justamente a construção do pentágono que despertou tamanho interesse dos gregos pelo estudo da razão áurea (Livio, 2006).

Inscriver, no círculo dado, um pentágono tanto equilátero quanto equiângulo



Seja o círculo dado ABCDE; é preciso, então, inscrever no círculo ABCDE um polígono tanto equilátero quanto equiângulo.

Fique posto o triângulo isósceles FGH, tendo cada um dos ângulos junto aos G, H o dobro do junto ao F, e fique inscrito no círculo ABCDE o triângulo ACD equiângulo com o triângulo FGH, de modo a ser, por um lado, o sob CAD igual ao ângulo junto ao F, e, por outro lado, cada um dos juntos aos G, H igual a cada um dos sob ACD, CDA; portanto também cada um dos sob ACD, CDA é o dobro do sob CAD. Fique,

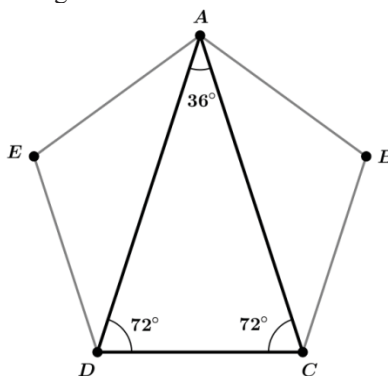
então, cortado cada um dos sob ACD, CDA em dois por cada uma das retas CE, DB, e fiquem ligadas as AB, BC, [CD], DE, EA.

Como, de fato, cada um dos ângulos ACD, CDA é o dobro do sob CAD e são cortados em dois pelas retas CE, DB, portanto, os cinco ângulos sob DAC, ACE, ECD, CDB, BDA são iguais entre si. Mas os ângulos iguais situam-se sobre circunferências iguais; portanto, as cinco circunferências AB, BC, CD, DE, EA são iguais entre si. Mas retas iguais estendem-se sob as circunferências iguais; portanto, as cinco retas AB, BC, CD, DE, EA são iguais entre si; portanto, o pentágono ABCDE é equilátero. Digo, então, que também é equiângulo. Pois, como a circunferência AB é igual a circunferência DE, fique adicionada a BCD comum; portanto, a circunferência ABCD toda é igual a circunferência EDCB toda. E, por um lado, o ângulo sob BAE sobre a circunferência EDCB; portanto, também o ângulo sob BAE é igual ao sob AED. Pelas mesmas coisas, então, também cada um dos ângulos sob ABC, BCD, CDE é igual a cada um dos sob BAE, AED; portanto, o pentágono ABCDE é equiângulo. Mas foi também provado equilátero.

Portanto, foi inscrito, no círculo dado, um pentágono tanto equilátero quanto equiângulo; o que era preciso fazer. (EUCLIDES, 2009, pg. 197)

Tanto o pentágono regular quanto o pentagrama estão associados de maneira íntima à proporção áurea. Por exemplo, na figura abaixo, a razão entre um dos lados e a base DC do triângulo $\triangle ADC$ está em extrema e média razão, ou seja, Φ . Como já vimos, esse tipo de triângulo recebe o nome de *triângulo áureo*. Já nos triângulos $\triangle AED$ e $\triangle ABC$, a relação entre um dos lados menores e a base (lado maior) é inversa, ou seja, $\frac{1}{\Phi}$. Esse tipo de triângulo é chamado de *gnômons áureo*.

Figura 25: Triângulo isósceles áureo inscrito no Pentagrama



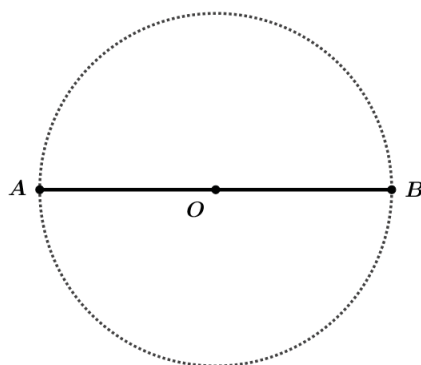
Fonte: Elaborado pelo autor

Por esse e outros motivos o pentágono regular fascinou tantos matemáticos ao longo dos tempos. Muitos deles propuseram as mais diversas maneiras de construí-lo, não somente com instrumentos euclidianos (régua não graduada e compasso). A seguir, é apresentado uma dessas construções utilizando apenas régua e compasso.

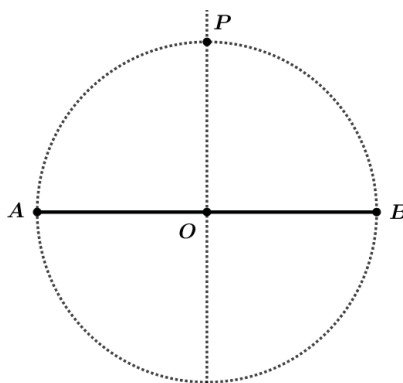
5.1.1 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DO PENTÁGONO REGULAR

Vamos fazer uma das várias possibilidades de construção do pentágono regular, que consiste em construí-lo inscrito num círculo.

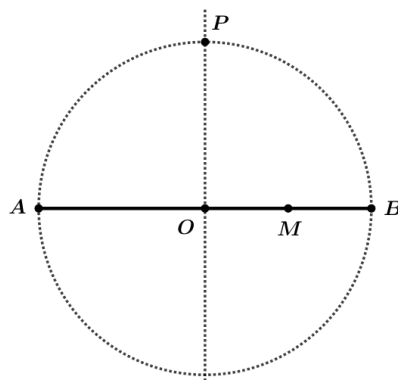
1º passo: Construir uma circunferência de centro O e diâmetro AB qualquer;



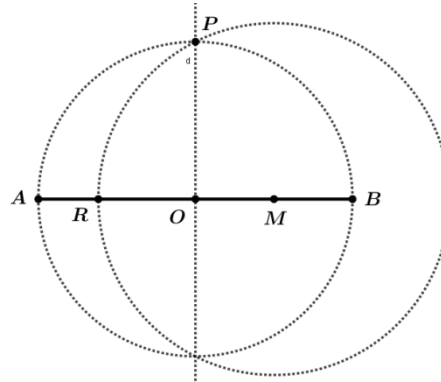
2º passo: Erguer OP perpendicular ao diâmetro AB ;



3º passo: Marcar M , ponto médio de OB ;



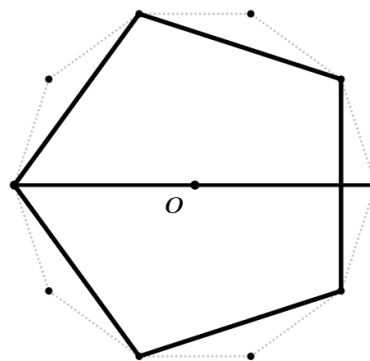
4º passo: Com centro em M e raio MP traçar o arco de circunferência que intercepta AB em R ;



5º passo: Então, RO será a medida do lado de um decágono regular;

6º passo: Como conhecemos a medida do lado do decágono regular, é simples construir o pentágono, basta unir os vértices do decágono dois a dois como a Figura 26 abaixo.

Figura 26: Pentágono regular



Fonte: Elaborado pelo autor

5.1.2 JUSTIFICATIVA DA CONSTRUÇÃO

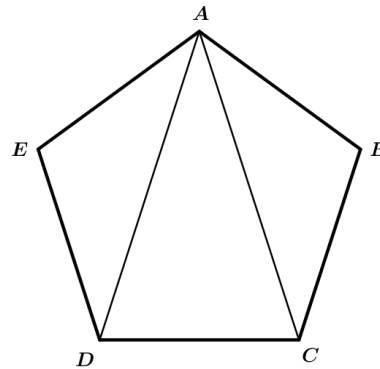
Proposição 5.1: A razão entre a diagonal e o lado do pentágono é igual a Φ .

Demonstração:

Para validar a construção do pentágono, vamos considerar a relação entre o lado e a diagonal. Para isso, consideremos o pentágono $ABCDE$.

Traçando as diagonais AD e AC obtemos três triângulos isósceles, ABC , ACD e ADE .

Figura 27: Pentágono regular



Fonte: Elaborado pelo autor

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um pentágono é 540° . Como o pentágono que estamos considerando é regular, logo todos os ângulos são iguais, ou seja, medem 108° . Note que, como o pentágono é regular, os triângulos ABC e AED são isósceles e, inclusive, congruentes. Os ângulos $CAB \cong BCA \cong DAE \cong ADE = 36^\circ$. Logo, no triângulo ACD , como $AC \cong AD$, o triângulo é isóscele. Sabemos que:

$$\begin{aligned}\angle BCD &= \angle BCA + \angle ACD = 108^\circ \\ \Rightarrow 36^\circ + \angle ACD &= 108^\circ \\ \Rightarrow \angle ACD &= 72^\circ\end{aligned}$$

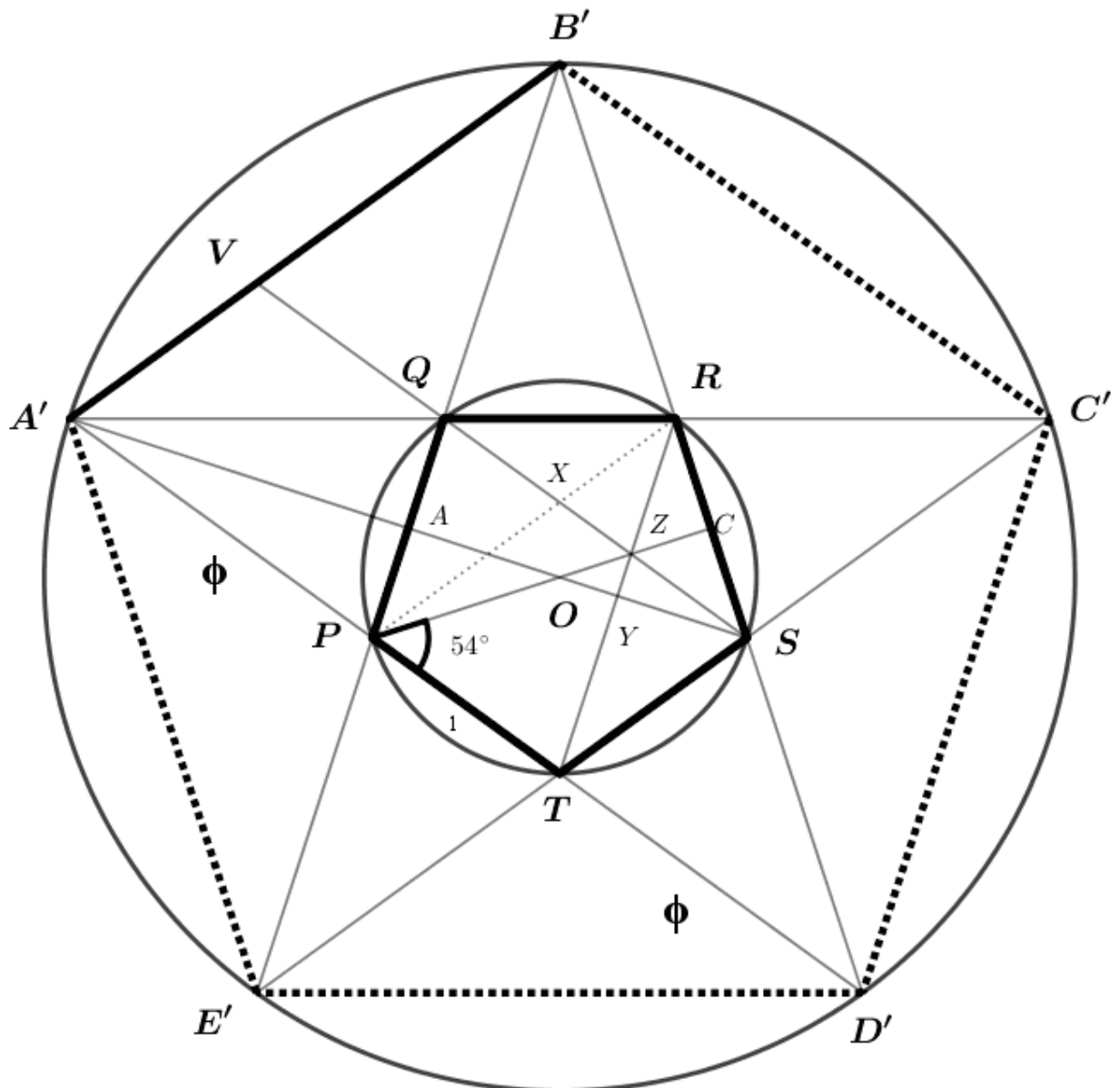
De modo análogo, encontramos que $\angle ADC = 72^\circ$. Portanto, podemos concluir que $\angle CAD = 36^\circ$. Isso nos remete a uma figura já conhecida, o triângulo áureo, cuja razão entre o lado maior (no nosso caso a diagonal) e o lado menor (lado do pentágono) é igual a Φ .

$$\therefore \frac{AC}{DC} = \Phi$$

5.2 O PENTAGRAMA E SUAS PROPRIEDADES

Como já vimos, o pentagrama é uma figura geométrica em formato de estrela, que pode ser construída através do prolongamento dos lados de um pentágono regular ou através das diagonais desse polígono. É no pentagrama que se encontra a maior quantidade de razões áureas. Vamos verificar alguma dessas propriedades, para tal consideremos a figura abaixo:

Figura 28: Pentagrama

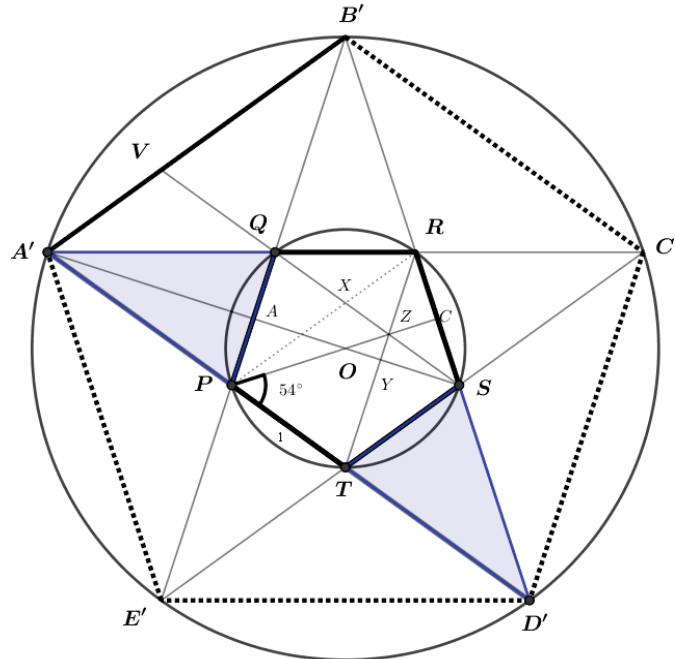


Fonte: Elaborado pelo autor

Seja O o centro de duas circunferências de raios R e r , onde R é o raio da circunferência maior e r é o raio da menor. Consideremos ainda um pentágono $A'B'C'D'E'$ inscrito na circunferência maior, e o pentágono $PQRST$, de lado igual a 1 u.c. , inscrito na circunferência menor.

Propriedade 5.1: $A'P = \Phi$

Figura 29: Pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Sabemos que cada ângulo interno de um pentágono regular é igual a 108° , logo $\angle TPQ = 108^\circ$ e $\angle RQP = 108^\circ$. Como $\angle A'PQ$ e $\angle A'QP$ são suplementos dos $\angle TPQ$ e $\angle RQP$, respectivamente, então o triângulo $\Delta A'PQ$ é isósceles. Procedendo de maneira análoga, temos que o triângulo $\Delta D'TS$ também é isósceles e, por LLL, os triângulos $\Delta A'PQ$ e $\Delta D'TS$ são congruentes, portanto $A'P \cong TD'$. Assim, podemos aplicar a seguinte relação:

$$\frac{A'P}{PD'} = \frac{PD'}{A'D'}$$

mas $A'P \cong TD'$ e $PD' = 1 + A'P$, logo

$$\Rightarrow \frac{A'P}{1 + A'P} = \frac{1 + A'P}{2A'P + 1}$$

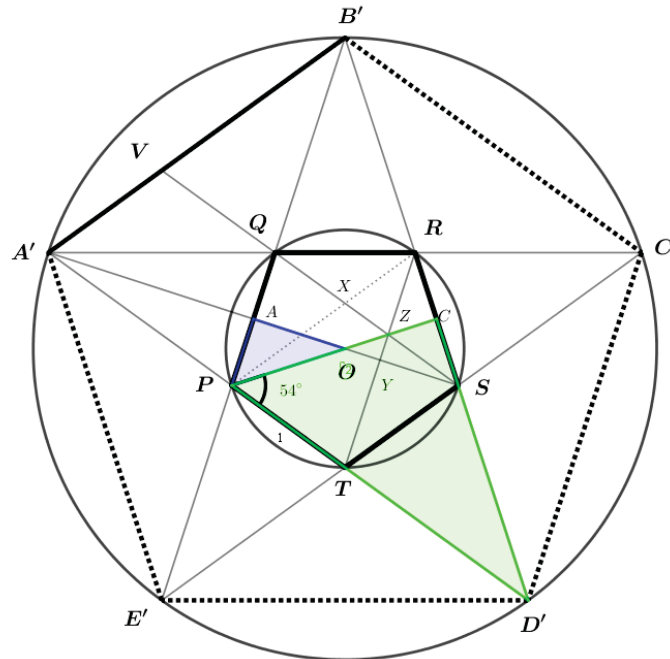
$$\Rightarrow 2(A'P)^2 + A'P = 1 + 2A'P + (A'P)^2$$

$$\Rightarrow (A'P)^2 - A'P - 1 = 0$$

$$\therefore A'P = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Propriedade 5.2: $\frac{OA}{r} = \frac{\Phi}{2}$

Figura 30: Pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Note que $OP = r$ e, no pentágono regular, a bissetriz interna de um ângulo é perpendicular ao lado oposto a esse ângulo, logo $\overline{PC} \perp \overline{A'A}$. Com isso, temos que $\angle PAO \cong \angle PCD = 90^\circ$. Temos também que $\angle APO \cong \angle CPD' = 54^\circ$, portanto, por AA, os triângulos $\triangle PAO$ e $\triangle PCD'$ são semelhantes. Com isso:

$$\frac{OA}{OP} = \frac{CD'}{PD'}$$

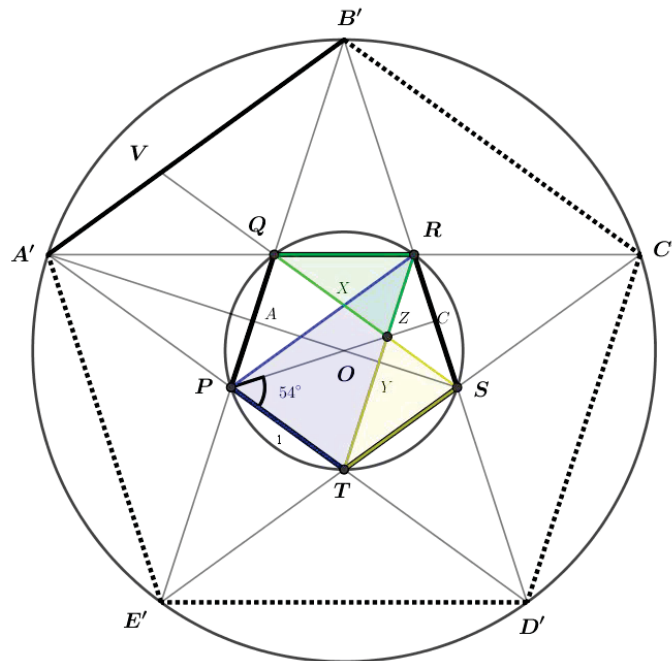
$$\Rightarrow \frac{OA}{r} = \frac{\Phi + \frac{1}{2}}{\Phi + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{r} = \frac{2\Phi + 1}{2(\Phi + 1)}$$

$$\therefore \frac{OA'}{r} = \Phi^2$$

Propriedade 5.4: A diagonal RT , por exemplo, tem comprimento igual a Φ .

Figura 32: Pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor

Estamos considerando a diagonal RT , mas as diagonais PR , PS , TQ , QS e RT são congruentes. Observe que os triângulos ΔPRT e ΔZRQ , no pentágono menor ($PQRST$), são semelhantes, por AA. Como as diagonais são congruentes, o triângulo ΔPRT é isósceles, e os ângulos $\angle QRZ = \angle RZQ = 72^\circ$.

Temos também que, como QR , PT e ST são lados do pentágono, então são congruentes. Por LAA_o, os triângulos ΔZRQ e ΔTSZ são congruentes e, portanto, o triângulo ΔTSZ é isóscele. Logo,

$$\frac{RT}{ZT} = \frac{ZT}{RZ}$$

$$\Rightarrow \frac{RT}{1} = \frac{1}{RT-1}$$

$$\Rightarrow (RT)^2 - RT - 1 = 0$$

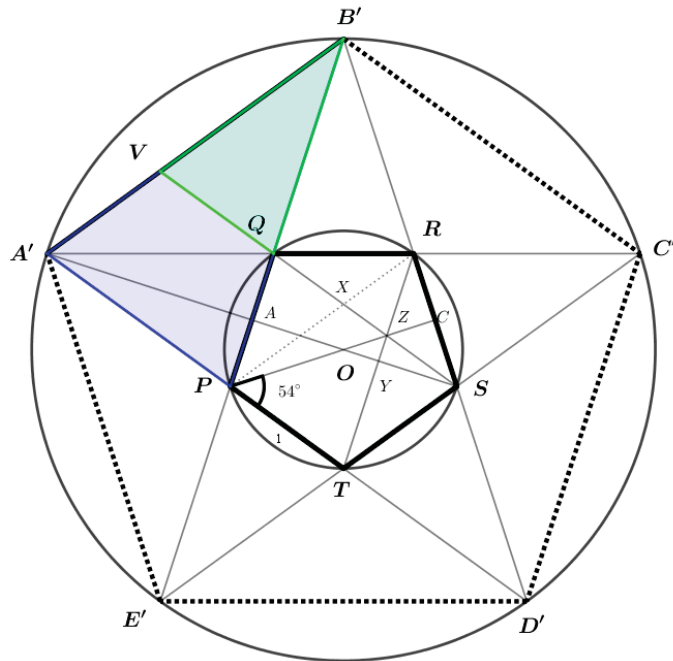
$$\frac{B'V}{VA'} = \frac{B'Q}{QP} = \frac{B'S}{SD'} = \Phi$$

Demonstração:

Vamos mostrar separadamente que: $\frac{B'V}{VA'} = \Phi$; $\frac{B'Q}{QP} = \Phi$; $\frac{B'S}{SD'} = \Phi$

(a) $\frac{B'V}{VA'} = \Phi$

Figura 36: Pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor

Como VS é paralela a $A'D'$, então os triângulos $\triangle A'PB'$ e $\triangle VQB'$ são semelhantes. Além disso, $A'B' = PB' = \Phi + 1$ e $VB' = QB' = \Phi$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{B'A'}{B'V} &= \frac{B'P}{B'Q} = \frac{A'P}{VQ} \\ \Rightarrow \frac{B'A'}{B'V} &= \frac{\Phi + 1}{\Phi} \end{aligned}$$

Da relação $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ temos que $\Phi^2 = \Phi + 1$,

$$\frac{B'A'}{B'V} = \frac{\Phi^2}{\Phi} = \Phi$$

Consequentemente,

$$\frac{B'P}{B'Q} = \Phi \text{ e } \frac{A'P}{VQ} = \Phi$$

Temos que $B'A' = B'V + VA' = \Phi + 1$, como já sabemos que $B'V = B'Q = A'P = \Phi$ então $VA' = 1$

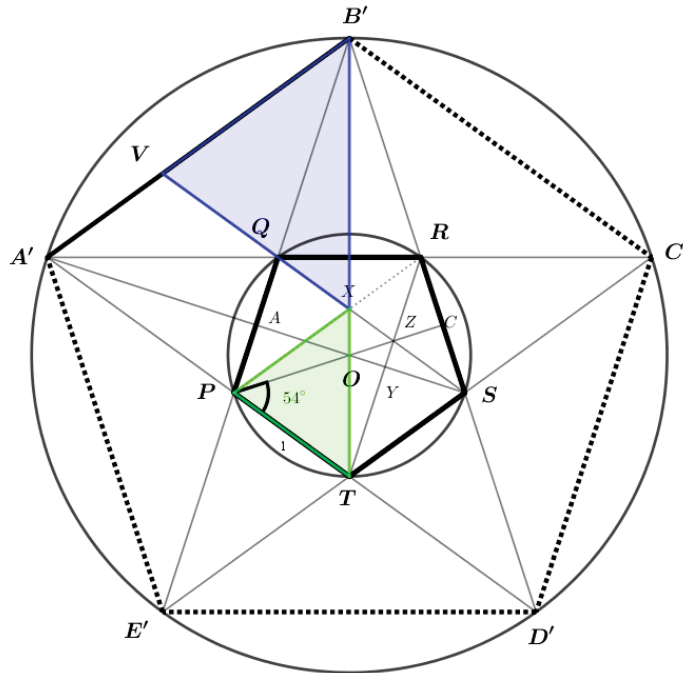
$$\therefore \frac{B'V}{VA'} = \frac{\Phi}{1} = \Phi$$

$$(b) \frac{B'Q}{QP} = \Phi$$

A demonstração é feita de modo análogo ao (a).

$$(c) \frac{B'S}{SD'} = \Phi$$

Figura 37: Pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor

Os triângulos $\triangle B'VX$ e $\triangle XPT$ são semelhantes. Temos também que $VX = A'P = \Phi$ e $PT = 1$, logo

$$\frac{B'X}{XT} = \frac{\Phi}{1} = \Phi$$

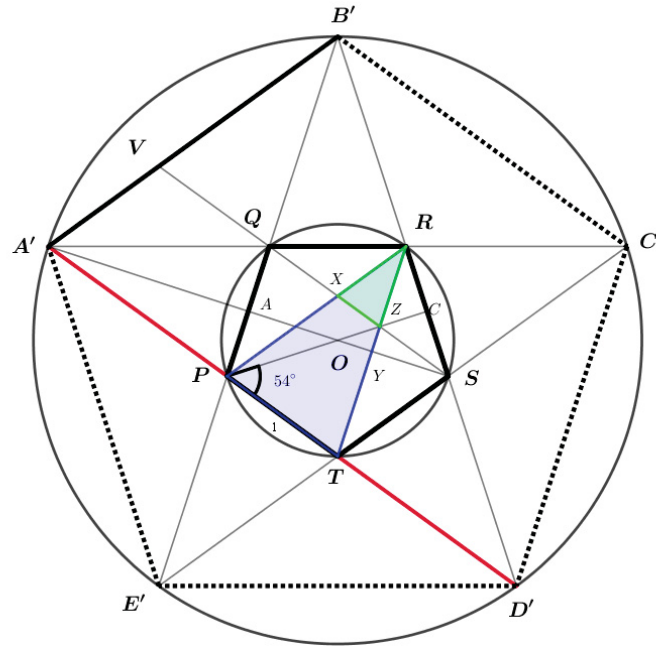
Ainda temos que os triângulos $\triangle STD'$ e $\triangle VB'S$ são semelhantes, logo

$$\frac{B'S}{SD'} = \frac{B'V}{ST}$$

$$\therefore \frac{B'S}{SD'} = \frac{\Phi}{1} = \Phi$$

Propriedade 5.8: Os comprimentos dos seis segmentos $A'D'$, $A'T$, $A'P$, PT , RX e XZ estão em progressão geométrica.

Figura 38: Pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Para essa prova, vamos utilizar as seguintes relações:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad (I)$$

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi \quad (II)$$

Já sabemos que $PT = 1$ e $A'P = \Phi$, logo

$$A'T = A'P + PT$$

$$\Rightarrow A'T = \Phi + 1$$

De (I), temos que:

$$A'T = \Phi^2$$

Temos também que

$$A'D' = A'P + PT + TD'$$

$$\Rightarrow A'D' = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$$

Mas, de (II), temos que

$$\Phi^3 = (\Phi + 1) + \Phi$$

$$\Rightarrow \Phi^3 = 2\Phi + 1$$

$$\Rightarrow A'D' = 2\Phi + 1 = \Phi^3$$

Note que, $PX = PQ = 1$ e $\frac{PX}{RX} = \Phi$, logo

$$\frac{PX}{\Phi} = RX$$

$$\Rightarrow RX = \frac{1}{\Phi} = \Phi^{-1}$$

Observe que os triângulos ΔPRT e ΔXRZ são semelhantes, logo

$$\frac{PR}{RX} = \frac{PT}{XZ}$$

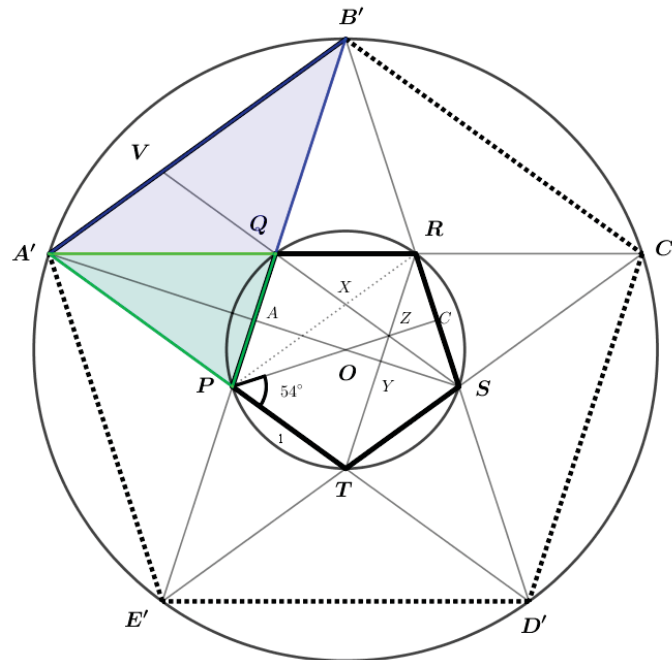
$$\Rightarrow \frac{\Phi}{\frac{1}{\Phi}} = \frac{1}{XZ}$$

$$\Rightarrow XZ = \frac{1}{\Phi^2} = \Phi^{-2}$$

Portanto, $A'D' = \Phi^3$; $A'T = \Phi^2$; $A'P = \Phi$; $PT = 1$; $RX = \Phi^{-1}$ e $XZ = \Phi^{-2}$

Propriedade 5.9: O comprimento de um lado do pentágono $A'B'C'D'E'$ é Φ^2

Figura 39: Pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Vamos tomar o triângulo $\Delta A'B'P$, cujo lado $A'B'$ também é lado do pentágono regular $A'B'C'D'E'$. Note que o triângulo $\Delta A'B'P$ é semelhante ao triângulo $\Delta A'QP$, logo

$$\frac{A'B'}{A'P} = \frac{A'P}{PQ}$$

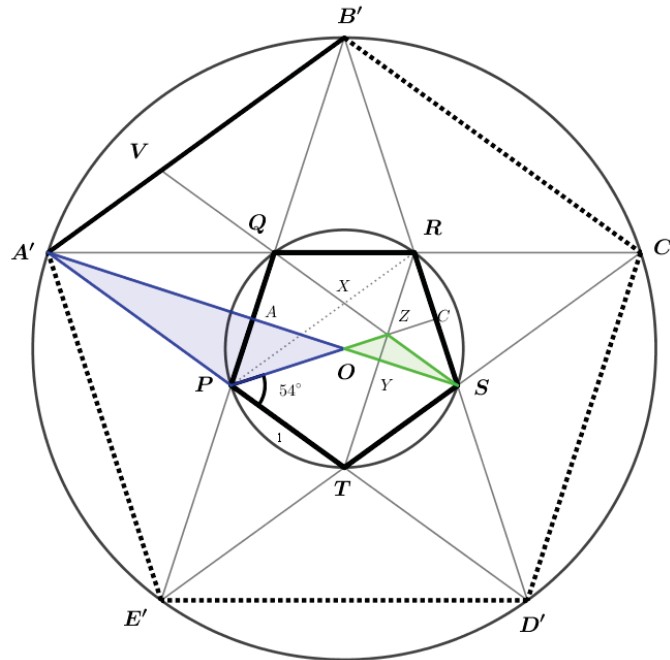
Mas $A'P = \Phi$ e $PQ = 1$

$$\frac{A'B}{\Phi} = \frac{\Phi}{1}$$

$$\therefore A'B = \Phi^2$$

Propriedade 5.10: $\frac{R}{r} = \Phi^2$

Figura 40: Pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Note que $A'O = R$ e $OS = r$ e os triângulos $\triangle A'OP$ e $\triangle OZS$ são semelhantes, então

$$\frac{A'O}{OS} = \frac{A'P}{ZS}$$

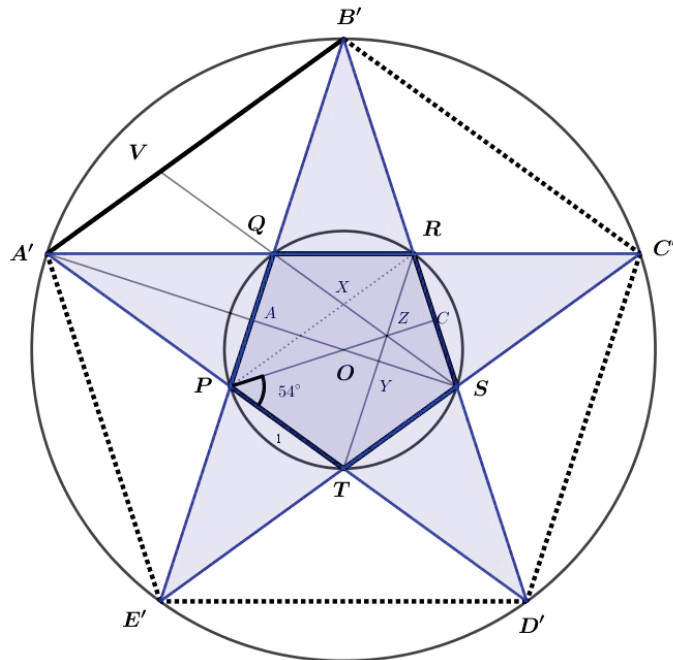
Mas $ZS = \frac{1}{\Phi}$ (proporção inversa), então

$$\frac{R}{r} = \frac{\Phi}{1}$$

$$\therefore \frac{R}{r} = \Phi^2$$

Propriedade 5.11: $\frac{OH}{OA} = 2$

Figura 41: Pentagrama



Fonte: Elaborado pelo autor

Demonstração:

Considerando a estrela de cinco pontas, obtida pelas diagonais do pentágono $A'B'C'D'E'$. Se dobrarmos os triângulos de modo que os vértices A', B', C', D' e E' se encontrem em H , obtém-se uma pirâmide, cuja a altura é OH .

Como o vértice H , da pirâmide $A'B'C'D'E'H$, é a junção dos vértices A', B', C', D' e E' do pentágono, então $AH \cong AA'$, por exemplo. Já sabemos que $OA' = R$, logo:

$$OA' = AA' + AO = R$$

$$\Rightarrow R = AA' + AO$$

$$\Rightarrow AA' = R - AO \quad (I)$$

Dividindo (I) por OA , temos:

$$\frac{AA'}{OA} = \frac{R}{OA} - 1$$

Já vimos, na **Propriedade 5.5**, que $\frac{AA'}{OA} = 2\Phi = \frac{R}{OA}$, logo:

$$\frac{AA'}{OA} = 2\Phi - 1$$

Do triângulo $\triangle HOA$, retângulo em O , temos que, aplicando o Teorema de Pitágoras,

$$(AH)^2 = (AO)^2 + (HO)^2 \quad (\text{II})$$

Dividindo (II) por $(AO)^2$,

$$\left(\frac{AH}{AO}\right)^2 = 1 + \left(\frac{HO}{AO}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{HO}{AO}\right)^2 = \left(\frac{AH}{AO}\right)^2 - 1$$

Mas $\frac{AH}{OA} = \frac{AA'}{OA} = 2\Phi - 1$, logo:

$$\left(\frac{HO}{AO}\right)^2 = (2\Phi - 1)^2 - 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{HO}{AO}\right)^2 = 4\Phi^2 - 4\Phi + 1 - 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{HO}{AO}\right)^2 = 4\Phi^2 - 4\Phi$$

Sabemos que $\Phi^2 = \Phi + 1$,

$$\left(\frac{HO}{AO}\right)^2 = 4(\Phi + 1) - 4\Phi$$

$$\Rightarrow \left(\frac{HO}{AO}\right)^2 = 4\Phi + 4 - 4\Phi$$

$$\Rightarrow \left(\frac{HO}{AO}\right)^2 = 4$$

$$\therefore \frac{HO}{AO} = 2$$

Propriedade 5.12: $\frac{OH}{r} = \Phi$

Demonstração:

Da **Propriedade 11**, temos que:

$$HO = 2AO \text{ (I)}$$

Pela propriedade 2,

$$2AO = \Phi r \text{ (II)}$$

Substituindo (I) em (II), chegamos que:

$$HO = \Phi r$$

$$\therefore \frac{HO}{r} = \Phi$$

5.3 DECÁGONO REGULAR

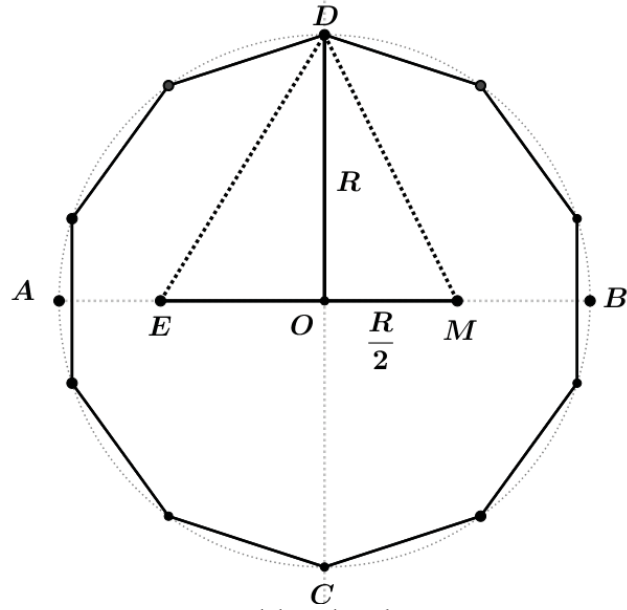
Para o decágono não será apresentada a construção, visto que já foi apresentada para a construção do pentágono e segue o mesmo processo.

Proposição 5.2: No decágono regular, inscrito numa circunferência de raio R , a relação entre o lado do decágono e o raio da circunferência é igual a $\frac{1}{\Phi}$.

Demonstração:

Seja a circunferência de centro O e raio R . E sejam AB e CD dois diâmetros perpendiculares. Seja M o ponto médio de OB , com centro em M e raio MD , traçamos um arco que intercepta AB em E de modo que $OE = l_{10}$ (lado do decágono).

Figura 42: Decágono



Fonte: Elaborado pelo autor

Note que o triângulo $\triangle DOM$ é retângulo, logo:

$$(MD)^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (MD)^2 = R^2 + \frac{R^2}{4}$$

$$\Rightarrow (MD)^2 = \frac{5R^2}{4}$$

$$\Rightarrow MD = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

Observe que, por construção, $MD = ME$ e

$$ME = OE + \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow OE = ME - \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow OE = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow OE = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$$

Como $OE = l_{10}$, então:

$$l_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$$

Assim, concluímos que o lado l_{10} do decágono é o segmento áureo do raio da circunferência.

6 RELAÇÕES ASSOCIADAS AO NÚMERO DE OURO

6.1 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência de Fibonacci é uma sequência definida recursivamente, em que cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores.

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$$

Essa sequência recebe esse nome por ser de autoria de um dos mais brilhantes matemáticos do século XIII, o italiano Leonardo Fibonacci. No entanto, ela só recebeu esse nome, efetivamente, em 1877, quando Edouard Lucas resolveu prestar uma homenagem a Fibonacci, dando-lhe seu nome (Carina & Vargas, 2011). Em sua obra mais famosa, o *Liber Abacci* (1202) ou Livro dos ábacos, Fibonacci apresenta o sistema de numeração decimal indo-arábico, que se via superior ao sistema de numeração romano que na época era o mais utilizado na Europa.

Figura 43: Livro Liber Abacci



Fonte: <https://andersonjcarvalho.wordpress.com/2011/03/27/historico-do-seculo-15-manuscrito-de-fibonacci-para-o-leilao/> . Acesso em: 15/03/19

Mas o nosso objeto de estudo principal é o célebre problema que dá origem a sequência em questão. Conhecido como o “problema dos coelhos”, ele se refere ao número de casais de coelhos em uma população após 12 meses. Para solução desse problema afirmam-se algumas proposições:

- (I) Tem-se, no mês 1, apenas um casal;
- (II) Os casais só reproduzem-se após o segundo mês de vida;
- (III) Não há problemas genéticos no cruzamento;
- (IV) Todos os meses, cada casal fértil dá à luz um novo casal;
- (V) Os coelhos nunca morrem.

Considerando tais condições, vejamos o processo de reprodução mês-a-mês:

1º mês – Tem-se um par de coelhos ainda bebês e inférteis.

2º mês – Continua com um único par, porém agora fértil.

3º mês – Nasce o primeiro par de coelhos, tornando-se dois, um par adulto e outro ainda infértil.

4º mês – O casal adulto dá à luz a mais um par de coelhos, e o outro par se torna fértil. Logo, são três pares.

5º mês – O primeiro casal dá à luz a mais um par de coelhos, o segundo casal já adulto dá à luz a seu primeiro par e temos mais um casal em idade fértil. Portanto, agora são cinco pares férteis.

E assim por diante. Para maior entendimento, vamos representar essa evolução na tabela abaixo:

Tabela 1: Reprodução dos coelhos

| MÊS | CASAIS ADULTOS | FILHOTES | TOTAL |
|-----|----------------|----------|-------|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 3 |
| 5 | 3 | 2 | 5 |
| 6 | 5 | 3 | 8 |
| 7 | 8 | 5 | 13 |
| 8 | 13 | 8 | 21 |
| 9 | 21 | 13 | 34 |
| 10 | 34 | 21 | 55 |
| ... | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor

E foi assim que surgiu o que conhecemos por sequência de Fibonacci:

{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...}

Podemos perceber que a partir do terceiro, o número de casais de coelhos, em um certo mês, é igual à soma dos dois termos anteriores, ou seja, o número de casais no 3º mês é igual à soma do número de casais do 2º mês mais o número de casais do 1º mês; o número de casais no 4º mês é igual à soma do número de casais do 3º mês mais o número de casais do 2º mês, e assim sucessivamente. Denotando por f_n o número de casais do n -ésimo mês, temos:

$$f_3 = f_2 + f_1$$

$$f_4 = f_3 + f_2$$

$$f_5 = f_4 + f_3$$

$$\vdots$$

Então, para $n \geq 3$, podemos generalizar:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Logo, temos uma relação de recorrência do tipo:

$$f(n) = f_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & n \geq 3 \end{cases}$$

De acordo com nossa equação, observe que é possível definirmos f_0 , pois,

$$f_2 = f_1 + f_0 \Rightarrow f_0 = 0$$

Assim, redefinindo nossa relação, podemos escrever:

$$f(n) = f_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

Mas qual a relação entre a sequência de Fibonacci e a razão áurea? Johannes Kepler (1571 a 1630), em 1611, descobriu uma curiosa relação entre os números de Fibonacci, e então escreveu: “Como 5 está para 8, 8 está para 13, aproximadamente, e como 8 está para 13, 13 está para 21, aproximadamente”. Ele percebeu que ao dividir um número qualquer dessa sequência

pelo seu antecessor (quanto mais se avança para valores maiores), o resultado se aproximava do número de ouro. Em termos matemáticos, isso quer dizer que:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} \rightarrow \Phi \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_n}{f_{n-1}} \right) = \Phi$$

Proposição 6.1: Seja $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ a Sequência de Fibonacci. Então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_n}{f_{n-1}} \right) = \Phi$$

Demonstração:

Observe na tabela a situação descrita:

Tabela 2: Razão áurea e sequência de Fibonacci

| n | f_n | f_{n-1} | $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ |
|----------|----------|-----------|-----------------------|
| 1 | 1 | | |
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1,5 |
| 5 | 5 | 3 | 1,66667 |
| 6 | 8 | 5 | 1,6 |
| 7 | 13 | 8 | 1,625 |
| 8 | 21 | 13 | 1,61538 |
| 9 | 34 | 21 | 1,61905 |
| 10 | 55 | 34 | 1,61765 |
| 11 | 89 | 55 | 1,61818 |
| 12 | 144 | 89 | 1,61798 |
| 13 | 233 | 144 | 1,61806 |
| \vdots | \vdots | 233 | \vdots |

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim, temos que:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}$$

Seja $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}}$, então:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}}$$

$$\Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} \right)$$

$$\Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}} \right)$$

$$\Rightarrow x = 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como a sequência de Fibonacci é constituída apenas por termos positivos, então:

$$x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \Phi$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_n}{f_{n-1}} \right) = \Phi$$

De acordo Huntley (1985, pg. 55)

[...] o Φ , em conformidade com sua característica de aparecer inesperadamente em locais estranhos, está relacionado com qualquer sequência de inteiros formada de acordo com a lei segundo a qual cada termo é a soma de dois termos anteriores, quaisquer que sejam os dois primeiros termos $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. A razão de termos sucessivos $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ aproxima-se cada vez mais de Φ à medida que n aumenta.

Também podemos mostrar essa relação entre o Φ e a Sequência de Fibonacci retomando a nossa relação de recorrência:

$$f(n) = f_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

é uma relação homogênea linear de grau 2. Para solucioná-la, vamos fazer a seguinte associação:

$$\begin{aligned} f_n = \lambda^n &\Rightarrow \lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \\ &\Rightarrow \lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^{n-2}(\lambda^2 - \lambda^1 - 1) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 - \lambda^1 - 1 = 0 \text{ (equação característica)} \end{aligned}$$

Resolvendo a equação característica, chegamos que:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Desse modo, a solução geral da recorrência é:

$$f_n = A \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Vamos agora determinar os valores de A e B na equação acima. Sabemos que $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$, logo:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases}$$

Temos então que $A = -B$, logo:

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 2 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1$$

$$\therefore B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Assim, a solução geral é dada por:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Essa equação é chamada de fórmula de Binet para a sequência de Fibonacci. De acordo com Livio (2011), tal equação já era conhecida por Euler (1707-1783) e também por Abraham de Moivre (1667 a 1754), mas foi no nome do matemático francês Jacques Philippe Marie Binet (1786 a 1856) que ela ficou conhecida, pois foi quem a redescobriu.

Como:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \text{ e } \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \Phi' = -\frac{1}{\Phi} = -\Phi^{-1}$$

Então, essa equação pode ser reescrita como:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^n\Phi^{-n} \text{ ou } f_n = \frac{\Phi^n - (-1)^n\Phi^{-n}}{\sqrt{5}}$$

Fica, então, evidente a relação entre a sequência de Fibonacci e o número de ouro.

6.2 OUTRAS REPRESENTAÇÕES DE Φ

O número Φ ainda pode ser representado através da expansão infinita simples em radicais e também sob a forma de fração contínua infinita simples, ou seja,

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}} \rightarrow \Phi \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

e

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \rightarrow \Phi \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Proposição 6.2: $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}} \rightarrow \Phi$

Demonstração:

Note que podemos escrever os termos dessa sequência da seguinte forma:

$$a_1 = \sqrt{1+\sqrt{1}} = \sqrt{2}$$

$$a_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = \sqrt{1+a_1}$$

$$a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}} = \sqrt{1+a_2}$$

Assim, o n -ésimo termo é dado por:

$$a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}$$

Como a_n é uma sequência crescente e limitada, então ela converge; isto é, existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}$$

Assim, de $a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}$, temos que:

$$(a_n)^2 = 1 + a_{n-1}$$

Aplicando limites, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_{n-1})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}$$

Como o $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}$ então:

$$x^2 = 1 + x$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Note que essa é justamente a equação que define o valor de Φ . Ou seja, suas raízes são:

$$x' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Descartamos x'' pois a sequência é crescente e de termos positivos. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Portanto,

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \rightarrow \Phi$$

Proposição 6.3: $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \rightarrow \Phi$

Demonstração:

Vimos que Kepler descobriu uma relação muito interessante entre dois números da sequência de Fibonacci:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}} = \frac{f_{n-2}}{f_{n-3}} = \frac{f_{n-3}}{f_{n-4}} = \dots \rightarrow \Phi \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Além disso, vimos que $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, logo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{f_{n-1}} &= \frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{f_{n-2} + f_{n-3}}{f_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{f_{n-3}}{f_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-2}}{f_{n-3}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-3} + f_{n-4}}{f_{n-3}}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{f_{n-4}}{f_{n-3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-3}}{f_{n-4}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-4} + f_{n-5}}{f_{n-4}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{f_{n-5}}{f_{n-4}}}} = \dots \end{aligned}$$

Acabamos de representar o quociente $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ através de uma fração contínua. Note que tal fração se assemelha bastante à sequência:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Observe ainda que os termos dessa sequência podem ser escritos da seguinte maneira:

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2 \Rightarrow f_2 = 1 + \frac{1}{f_1}$$

$$f_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2} \Rightarrow f_3 = 1 + \frac{1}{f_2}$$

$$f_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3} \Rightarrow f_4 = 1 + \frac{1}{f_3}$$

$$\vdots$$

Note que os resultados correspondem às razões entre os números consecutivos da sequência de Fibonacci. Assim, o n -ésimo termo da sequência será dado por:

$$f_n = 1 + \frac{1}{f_{n-1}}$$

Para mostrar, definitivamente, que essa fração também tende a Φ , vamos considerar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = x$$

Logo,

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Como a fração contínua se estende indefinidamente, o denominador da segunda parcela é idêntico ao próprio x . Então:

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Mas essa é uma equação já conhecida, sabemos que a raiz positiva dessa equação é:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Portanto a fração contínua $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \rightarrow \Phi$

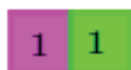
6.3 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O RETÂNGULO DE OURO

Por meio da sequência de Fibonacci é possível construirmos um retângulo que se assemelha ao retângulo áureo. Como sabemos, cada termo da sequência, a partir do terceiro termo, é obtido pela soma dos dois antecessores. Assim, podemos construir quadrados e organizá-los seguindo as seguintes etapas:

1º passo: Começando com um quadrado de lado 1:



2º passo: Construimos um novo quadrado, também de lado 1:



3º passo: Construimos agora um quadrado de lado $1 + 1 = 2$:



Seguindo os passos descritos anteriormente, vamos construindo os retângulos de lados 5, 8, 13, 21, Como segue abaixo:

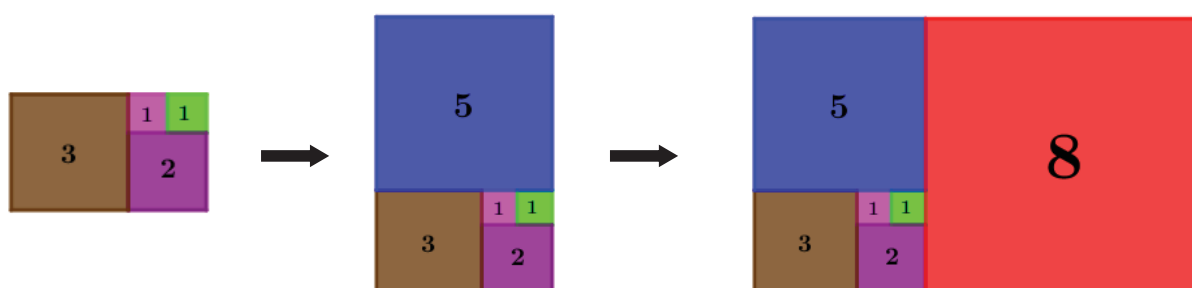


Figura 44: Construção do Retângulo de Fibonacci

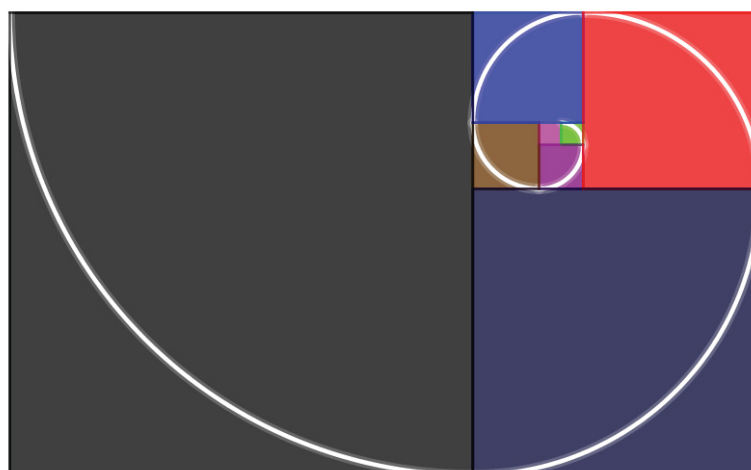


Fonte: Elaborado pelo autor

Note que, assim como acontece na Tabela 2, que apresenta a razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci, quanto mais quadrados forem dispostos lado-a-lado, mais a razão entre seus lados vai se aproximar de Φ .

É possível também construir uma espiral nesse retângulo, de modo semelhante ao que foi feito na espiral construída no retângulo áureo.

Figura 45: Retângulo de Fibonacci e a Espiral de Fibonacci



Fonte: Elaborado pelo autor

6.4 O Φ NA TRIGONOMETRIA

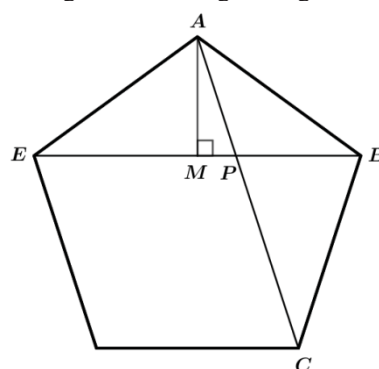
6.4.1 O Φ E O ÂNGULO DE 36°

Proposição 6.4: $\cos(36^\circ) = \frac{\Phi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Demonstração:

Sabemos que no pentágono regular os ângulos internos têm medida igual a 108° e que traçando uma de suas diagonais, EB , por exemplo, forma-se um triângulo isósceles em que os ângulos da base têm medida 36° .

Figura 46: Pentágono regular



Fonte: Elaborado pelo autor

Vimos, no capítulo 5, que a razão entre a diagonal do pentágono e o lado é igual a Φ , por exemplo:

$$\frac{EB}{AB} = \Phi$$

Se traçarmos a altura do triângulo $\triangle ABE$, relativa ao lado EB , tal lado fica dividido ao meio e o triângulo $\triangle AMB$ (onde M é a interseção da altura com o lado EB) é um triângulo retângulo em M . Da trigonometria no triângulo retângulo temos que:

$$\cos(36^\circ) = \cos(\hat{ABE}) = \frac{MB}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{EB}{2}}{AB} = \frac{\frac{EB}{2}}{AB}$$

$$\therefore \cos(36^\circ) = \frac{EP}{AB} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\Phi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(36^\circ) = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

6.4.2 O Φ E O ÂNGULO DE 18°

Proposição 6.4: $\text{sen}(18^\circ) = \frac{1}{2\Phi}$

Demonstração:

Das relações trigonométricas, sabemos que:

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) \quad \text{e} \quad \cos(2\alpha) = 1 - 2\text{sen}^2(\alpha)$$

Seja $\alpha = 18^\circ$, então:

$$\text{sen}(36^\circ) = 2\text{sen}(18^\circ)\cos(18^\circ) \quad \text{e} \quad \cos(36^\circ) = 1 - 2\text{sen}^2(18^\circ)$$

Temo ainda que:

$$\text{sen}(72^\circ) = 2\text{sen}(36^\circ)\cos(36^\circ)$$

$$\Rightarrow \text{sen}(72^\circ) = 2[2\text{sen}(18^\circ)\cos(18^\circ)][1 - 2\text{sen}^2(18^\circ)]$$

$$\Rightarrow \text{sen}(72^\circ) = 2[2\text{sen}(18^\circ)\cos(18^\circ)][1 - 2\text{sen}^2(18^\circ)]$$

$$\Rightarrow \text{sen}(72^\circ) = [4\text{sen}(18^\circ)\cos(18^\circ)][1 - 2\text{sen}^2(18^\circ)]$$

Como o $\text{sen}(72^\circ) = \cos(18^\circ) \neq 0$, podemos simplificar e escrever:

$$\Rightarrow 1 = [4\text{sen}(18^\circ)][1 - 2\text{sen}^2(18^\circ)]$$

Seja $\text{sen}(18^\circ) = x$, temos:

$$\Rightarrow 1 = 4x[1 - 2x^2]$$

$$\Rightarrow 4x - 8x^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -(2x-1)(4x^2+2x-1) = 0$$

Como x não pode ser igual a $\frac{1}{2}$, pois $\frac{1}{2} = \text{sen}(30^\circ)$ e não $\text{sen}(18^\circ)$, então nos sobra que:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

que são as raízes da equação $4x^2+2x-1=0$. Como o ângulo de 18° pertence ao primeiro quadrante e este é positivo, então:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2\Phi}$$

Portanto, concluímos que:

$$\text{sen}(18^\circ) = x = \frac{1}{2\Phi}$$

E assim, com base nos resultados dessa seção, é possível obter os valores trigonométricos de diversos outros arcos algebricamente. Como, por exemplo, $\text{sen}(54^\circ)$, $\cos(54^\circ)$, $\cos(72^\circ)$, entre vários outros.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciarmos esta pesquisa, nos propusemos a realizar um mapeamento das principais características e propriedades que o Número de Ouro assume na matemática, em suas mais diversas áreas.

Nesse processo, tivemos a contribuição de algumas bibliografias que nos auxiliaram e de um *software* de geometria dinâmica, o Geogebra, que enriqueceu o trabalho com as imagens (muitas vezes construídas com um certo grau de complexidade) para facilitar a visualização e, consequentemente, a compreensão do tema que estava sendo estudado.

Com isso, o aprendizado foi muito significativo de um modo geral. No âmbito da história desse número quando conhecemos diversos matemáticos que se dedicaram aos seus estudos. Sua primeira definição dada por Euclides – *extrema e média razão*. O desconforto causado entre os pitagóricos com a descoberta da sua incomensurabilidade. Além de algumas obras arquitetônicas que, possivelmente, utilizaram conhecimentos de *Phi* em suas construções.

Na Geometria, construímos e estudamos as características e propriedades das figuras que possuem relação com Φ (chamadas figuras geométricas áureas), com um destaque especial para o pentágono regular, a figura que possui a maior quantidade de relações envolvendo esse número. Descobrimos ainda, a relação intrínseca com a curiosa e famosa Sequência de Fibonacci e com os ângulos de 18° e 36° , na Trigonometria.

Dessa forma, atingimos nosso objetivo ao mostrarmos as aplicações do Número de Ouro nas diversas áreas da matemática, ou seja, sua onipresença. Assumindo características próprias enquanto número, como pudemos perceber nas relações existentes entre as raízes da equação de segundo grau ($x^2 - x + 1 = 0$), em sua relação com a autopropagações das figuras áureas, enquanto limite da razão entre os termos de uma sequência numérica que, a princípio, não tem nada a ver com a geometria, entre outras.

Esperamos que esse trabalho contribua no desenvolvimento de novas pesquisas e na divulgação das propriedades, curiosidades e aplicações do Número de Ouro. Pois, quanto mais nos aprofundamos em seu estudo, nos deparamos com curiosas situações matemáticas e relações que, a princípio, nunca imaginariamos ocorrer, por se tratar de áreas, aparentemente, tão distantes dentro da matemática.

Assim, acreditamos que esta dissertação se trata de um excelente material de apoio ao professor de matemática, no seu processo de ensino aprendizagem, pois, apesar de não trazer atividades específicas, fornece subsídios teóricos, permitindo-lhe relacionar e explorar o

número *Phi* com diversos outros conteúdos matemáticos. Pode também contribuir para os estudantes e amantes da matemática que tenham interesse em aprofundar seus conhecimentos acerca desse número.

Contudo, as possibilidades nos estudos do Número Áureo não se esgotam nesta abordagem, isso porque, no campo matemático, ficam algumas lacunas, como sua relação com os Números Complexos. Já no campo do ensino-aprendizagem há um leque de possibilidades a serem explorados, principalmente na Educação Básica, como pesquisas investigativas com uma proposta de abordagem com a utilização de atividades por meio de *softwares* de matemática dinâmica, por exemplo.

Por fim, após todo o estudo e os resultados obtidos, fica fácil compreender o fascínio de tantos matemáticos, ao longo dos séculos, pelo Número de Ouro. É surpreendente perceber a ubiquidade desse número nas mais diversas áreas da Matemática, muitas vezes inesperadas.

REFERÊNCIA

ÁVILA, Geraldo. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática (RPM). nº 6, SBM, 1º semestre de 1985.

BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

BELLOS, Alex. Alex no país dos números uma viagem ao mundo maravilhoso da matemática. São Paulo-SP: Companhia das Letras, 2011. Tradução: Berilo Vargas, Claudio Carina.

BERLINGHOFF, William P. GOUVÊA, Fernando Q.. A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2º ed., São Paulo: Blucher, 2010. Tradução: Elza Gomide, Helena Castro.

BERTATO, Fábio Maia. “De Divina Proportione” de Luca Pacioli – Tradução anotada e comentada. Tese (Doutorado), Campinas-SP, 2008. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/280394>. Acesso em: 18 out. 2018.

BICUDO, Irineu. Histórias das paralelas: o V postulado de Euclides e o axioma da escolha. Revista Brasileira de História da Matemática, Rio Claro-SP, 2005.

BOYER, Carl B., História da Matemática, 2º ed., São Paulo-SP, Edgard Blucher, 1996. Tradução: Elza F. Gomide.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. A matemática na arte e na vida. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DANTE, L. R. Projeto Teláris – Matemática – 6º ano, São Paulo: Ática, 2014.

EUCLIDES. Elementos. São Paulo-SP: Editora da UNESP, 2009. Tradução e introdução: Irineu Bicudo.

GARBI, Gilberto Geraldo; C.Q.D.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e formulas essenciais da geometria; São Paulo-SP; Editora Livraria da Física, 2010.

GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marília. Cálculo A: funções, limites, derivadas e integração. 6.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

HISTÓRIA da Geometria. Lisboa-PT. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm16/historia.htm>.

HUNTLEY, H.E., A Divina Proporção. Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1985. Tradução: Luís Carlos Ascêncio Nunes.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar: volume 1: conjuntos e funções. 9 ed. São Paulo: Atual, 2013.

LÍVIO, Mário, Razão Áurea – A História de Φ , um número surpreendente, Editora Record, 2006.

MARKOWSKY, G.; Misconceptions About The Golden Ratio. College Mathematics Journal, vol. 23, n. 1, pp. 2-19, 1992. Disponível em: <http://www.umcs.maine.edu/markov/GoldenRatio.pdf>.

MOISE, Edwin. E.; DOWNS, Floyd. L. Geometria Moderna. 1ª ed. em língua inglesa de 1964. Tradução: Renata G. Watanabe e Dorival A. Mello. Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1971.

MOL, Rogério Santos. Introdução à história da matemática, Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

PINHO, José Luiz R.; BATISTA, Eliezer; CARVALHO, Neri Terezinha B. Geometria I, 2. ed. Florianópolis-SC: EAD/UFSC/CED/CFM, 2010.

STEWART, James. Calculus. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra et al. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2009.

WAGNER, Eduardo. *Construções Geométricas*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

ZANH, Maurício. Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2011.